

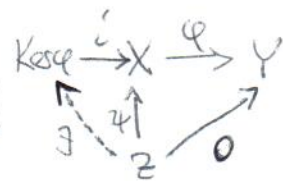
# Seminario: (Categorie derivate)

Def. Una categoria  $\mathcal{A}$  si dice abeliana se:

- additive
- 1)  $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \Rightarrow \text{Hom}(X, Y)$  è un gruppo abeliano e la composizione è bilineare.
  - 2)  $\exists 0 \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  i.e.,  $\text{Hom}(0, X) = 0$  e  $\text{Hom}(X, 0) = 0 \quad \forall X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$
  - 3)  $\forall X_1, X_2 \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \exists X_1 \oplus X_2$  e  $X_1 \times X_2$

4) i)  $\forall \varphi \in \text{Hom}(X, Y) \exists \text{Ker } \varphi, \text{coker } \varphi$ .

ii) Ogni monomorfismo è il kernel del suo cokernel e ogni epimorfismo è il cokernel del suo kernel.



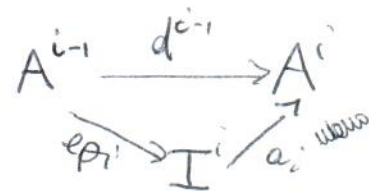
iii) ogni  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  fattorizza tramite  $I$ .

A questo punto  $\mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Born}(\mathcal{A})$

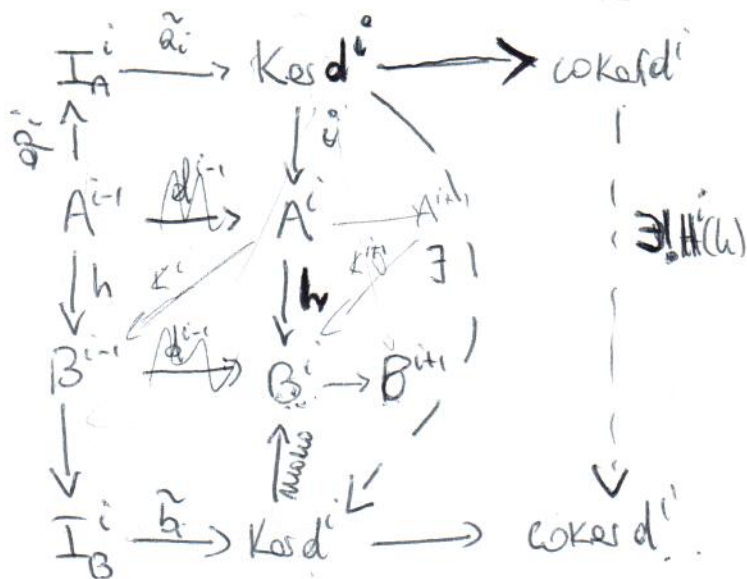
$$A^\bullet: \dots \rightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots \quad d^2 = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & h^i \downarrow & & h^{i+1} \downarrow & & h^{i+2} \downarrow \\ & & B^{i-1} & \rightarrow & B^i & \rightarrow & B^{i+1} \rightarrow \dots \end{array}$$

Def:  $H^i(A^\bullet) := \text{coker}(I^i \xrightarrow{\tilde{a}_i} \text{Ker } d^i)$



$H(h): H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet)$



Def:  $h: A^0 \rightarrow B^0$  si dice quasi-isomorfismo se  $H(h)$  è un isomorfismo.

Def: <sup>(omotopia)</sup>  $\psi \sim \varphi$  se  $\psi - \varphi = dk + kd$  dove  $k: K^i: A^i \rightarrow B^{i-1}$ .  
oss  $\sim$  è una relazione d'equiv.

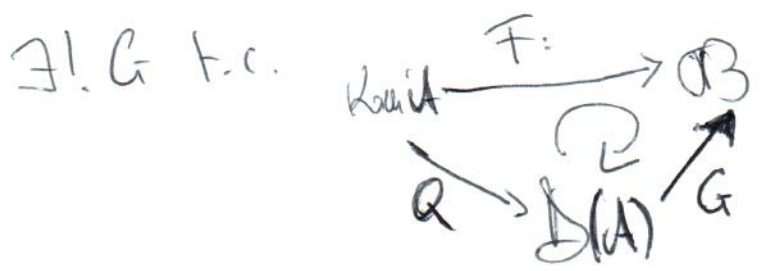
Lemma:  
 $\psi \sim \varphi \Rightarrow H(\psi) = H(\varphi)$ .

Dim:  $\psi \sim 0 \Rightarrow H(\psi) = 0$  (vedi disegno).  
 $H$  è un funtore additivo.

L'idea era è quella di costruire una categoria in cui i quasi-iso diventano iso.

Def: La categoria derivata di  $\text{Kam}(A)$  è il dato di  $Q: D(A) \rightarrow \text{Kam}(A)$  soddisfacente la seguente proprietà universale:

$\forall F: \text{Kam}(A) \rightarrow B$  trasformate quasi-iso in iso



Esistenza tramite localizzazione.

In generale data una categoria  $B$  e una classe di morfismi  $S \subset \text{Mor } B$  posso costruire la localizzazione  $B[S^{-1}]$ .  
 $Q: B \rightarrow B[S^{-1}]$ .

1)  $\text{Ob } B[S^{-1}] = \text{Ob } B$   $Q$  è l'identità sugli oggetti.

Per costruire i morfismi introduciamo alcuni oggetti:

- a)  $\forall s: X \rightarrow Y$  introduciamo la variabile formale  $x_s: X \leftarrow Y$ .
- b) costruiamo un grafo orientato  $\Gamma$  come segue:
  - i) i vertici di  $\Gamma$  sono gli oggetti di  $B$
  - ii) gli archi sono i morfismi  $+ x_s$
  - c) l'insieme di cammini in  $\Gamma$  è una ~~quasi~~ <sup>quasi</sup> ~~finita~~ <sup>finita</sup> ~~di~~ <sup>di</sup> ~~...~~ <sup>...</sup>

d) Un morfismo in  $\mathcal{B}[S^{-1}]$  è la classe di equivalenza di  $(3)$   
~~due~~ cammini con stesso inizio e stessa fine. Dove le relazioni  
 sono del tipo seguente:

- due frecce consecutive possono essere sostituite con la loro  
 composizione

$$- X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{x_0} X \sim X \xrightarrow{\text{id}} X \quad Y \xrightarrow{x_0} X \xrightarrow{s} Y \sim Y \xrightarrow{\text{id}} Y$$

la composizione si fa congiungendo due cammini.

Teorema  $\exists$  di  $\mathcal{D}(A)$ ,  $B = \text{Kom}(A)$

Basta prendere  $S = \text{quasi-iso}$  e porre  $G(x) = F(s)^{-1}$ .

Problema: Capire meglio com'è fatta  $\mathcal{D}(A)$ . In generale  $\mathcal{B}[S^{-1}]$ ;  
 (i morfismi a priori sono cose del tipo  $x_0 \circ f_1 \circ x_2 \circ f_2 \circ x_3 \circ f_3 \dots$ )  
 Ci vogliamo delle proprietà su  $S$ .

Def (sistema localizzante)

Una classe di morfismi  $S \subset \text{Mor } B$  è detta essere "localizzante" se le  
 seguenti:

1)  $\text{id}_X \in S \forall X \in \text{Ob } B$  e  $S$  è chiuso sotto composizione

2) Condizioni d'estensione:

$\forall f \in \text{Mor } B, s \in S \exists g \in \text{Mor } B$  e  $t \in S$  t.c.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Z \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{g} & Z \\ t \uparrow & & \uparrow s \\ X & \xleftarrow{f} & Y \end{array} \right) \quad \leftarrow \text{alternative?}$$

3) Siano  $f, g \in \text{Mor}(X, Y)$

$\exists s \in S$  con  $sf = sg$  è equivalente a  $\exists t \in S$  con  $ft = gt$ .

Oss.: da sx si ha  $ft = sg \Rightarrow x_s f + x_t = x_s s g x_t \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x_s f = g x_t$  (4)

Oss.: I quasi-ideali in  $\text{Kom}(A)$  non sono un sistema localizzante.

Lemma: (pag 149 G-M)

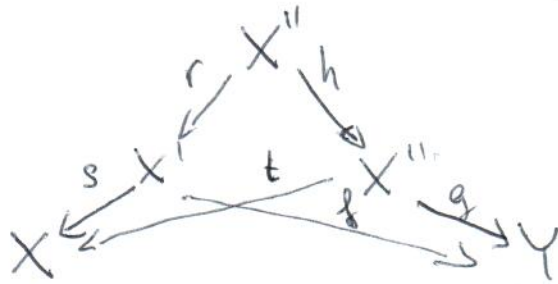
S loc. in  $B$ . Allora  $B[S^{-1}]$  può essere descritto come segue:

$$\text{Ob}(B[S^{-1}]) = \text{Ob} B \text{ e}$$

a) un morfismo  $X \rightarrow Y$  in  $B[S^{-1}]$  è una classe di "tetti".



dove due tetti sono equivalenti se  $(s, f) \sim (t, g) \Leftrightarrow \exists$  un tetto bello.



che forma un diagramma commutativo. (id:  $X \rightarrow X$  è la classe di  $X \leftarrow X \rightarrow X$ )

b) La composizione di due morfismi  $(s, f)$  e  $(t, g)$  è la classe del tetto  $(st', gf')$  ottenuto per estensione



Oss.: I quasi-isomorfismi non sono un sistema localizzante.\*

Dobbiamo introdurre la categoria  $K(A)$  dei complessi, in cui i morfismi sono considerati a meno di omotopia.

$$M = \mathbb{Z}_2 \text{ come } \mathbb{Z}\text{-moduli}$$

$$N = \mathbb{Z}_2$$

\* Controesempio  $\text{Ext}^i(M, N) \neq 0$ .

Tecniche: Come e alindri di un morfismo:

$A \rightsquigarrow \text{Hom}(A)$

Def: Sia  $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ . Un cono di  $f$  è il seguente complesso:

$$C(f)^\bullet: C(f)^i = K[1]^i \oplus L^i, \quad d_{C(f)} = (-d_K, f + d_L)$$

in notazione matriciale  $\begin{pmatrix} d_{K[1]} & 0 \\ f & d_L \end{pmatrix} \Rightarrow d_{C(f)}^2 = 0$

Def:  $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ . Il cilindro di  $f$  è il seguente

$$\text{Cyl}(f)^\bullet: \text{Cyl}(f)^i = K^i \oplus K[1]^i \oplus L^i$$

$$d_{\text{Cyl}(f)}^i = (d_K - \text{id}_{K[1]}, -d_{K[1]}, f_{K[1]} + d_L)$$

Lemma: (f)

$\forall f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$  morfismo di complessi si ha il seguente diagramma commutativo con righe esatte.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L^\bullet & \xrightarrow{\tilde{\alpha} = (0, \text{id})} & C(f) & \xrightarrow{\pi_1 = \delta} & K[1]^\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha = (0, 0, \text{id}) & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & K^\bullet & \xrightarrow{(\text{id}, 0, 0)} & \text{Cyl}(f) & \xrightarrow{\pi = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}} & C(f) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow (f + \text{id}) = \beta & & \\ & & K^\bullet & \xrightarrow{f} & L^\bullet & & \end{array}$$

tale che  $\alpha$  e  $\beta$  sono quasi-isomorfismi: di più  $\beta\alpha = \text{id}_L$  e  $\alpha\beta$  è omotopico ad  $\text{id}_{\text{Cyl}(f)}$ . Così che  $\text{Cyl}(f)$  e  $L^\bullet$  sono canonicamente isomorfi nella categoria derivata.

Dim: Tutto facile, fino all'omotopia. Poi basta definire

$$h^i: \text{Cyl}(f)^i \rightarrow \text{Cyl}(f)^{i-1} \quad \text{come}$$

$$(k^i, k^{i+1}, e^i) \rightarrow (0, k^i, 0)$$

con  $dh = (d_{\text{Cyl}(f)} - (dh + h d))$

# Categoria derivata come localizzazione delle categorie austrope

Prop:  
La localizzazione di  $K(A)$  via quasi-iso. è canonicamente isomorfa a  $D(A)$ .

Dim:

Denotiamo  $\tilde{D}(A)$  la loc. di  $K(A)$ . Per costruzione:

$$Kom(A) \rightarrow K(A) \rightarrow \tilde{D}(A)$$

perché quasi-iso in iso per cui deve fattorizzare.

$$\begin{array}{ccccc} Kom(A) & \rightarrow & K(A) & \rightarrow & \tilde{D}(A) \\ \downarrow Q & & & \nearrow & \\ D(A) & & & \exists! G & \end{array}$$

ovviamente  $G$  è l'id sugli oggetti ed è suriettivo sui morfismi. Resta da mostrare l'unicità. Esso segue dal lemma:

Lemma:

$f, g: K^0 \rightarrow L^0$  austrope. Allora  $Q(f) = Q(g)$  in  $D(A)$ .

Dim:

Sia  $f = g + dh + hd$ . Allora definiamo  $c(h): C(f) \rightarrow C(g)$  tramite  $C(h) = (\text{id}_{Ker f}, \text{id}_L + h_{Ker f})$  (morfismo di complessi)

similmente  $Cyl(h) = (\text{id}_K, \text{id}_{Ker f}, \text{id}_L + h_{Ker f})$

Considerando il diagramma indotto dalle prime righe del lemma.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & C(f) & \xrightarrow{\delta(f)} & K[C]^0 \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow C(h) & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & C(g) & \xrightarrow{\delta(g)} & K[C]^0 \rightarrow 0 \end{array}$$

esso è commutativo

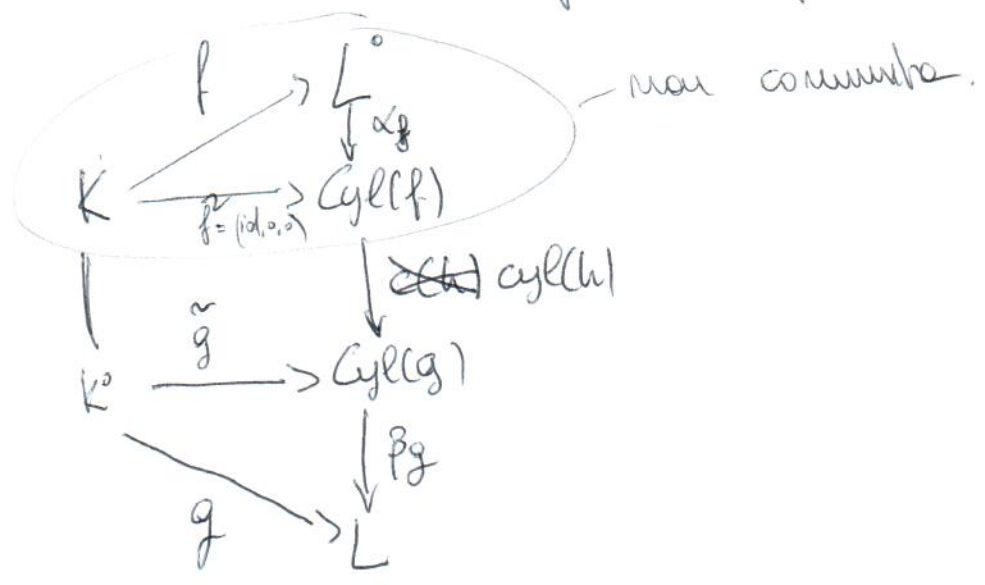
allora applicando il lemma dei 5 alle corrispondenti successioni esatte lunghe di coomologia. (vedi G-M pag 120)

si ha:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^{i-1}(K[\Omega]) & \rightarrow & H^i(L) & \rightarrow & H^i(CCF) & \rightarrow & H^i(K[\Omega]) \rightarrow H^{i+1}(L) \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 H^{i-1}(K[\Omega]) & \rightarrow & H^i(L) & \rightarrow & H^i(C(g)) & \rightarrow & H^i(K[\Omega]) \rightarrow H^{i+1}(L)
 \end{array}$$

si ha  $H^i(CCF) \xrightarrow{\sim H^i(CCF)} H^i(C(g))$  quindi  $\text{ch}$  è un quasi-iso. Stessa cosa per  $\text{Cyl}(\text{ch})$ .

A questo punto consideriamo il seguente diagramma.



Ma in D(A) il diagramma diventa commutativo perché  $\alpha(\alpha_f)$  e  $\alpha(\beta_g)$  sono inversi, così che  $f = \beta_g \circ \tilde{f} \Rightarrow \alpha(f) = \alpha(\beta_g) \circ \alpha(\tilde{f})$  e  $\alpha(\tilde{f}) = \alpha(\alpha_f) \circ \alpha(f)$ .

A questo punto tutto segue dal fatto che  $\beta_g \text{Cyl}(\text{ch}) \alpha_f = \text{id}_L$ .



Testo:

La classe dei quasi-isomorfismi in  $K(A)$  è localizzante.

Dim: ~~Bozza~~ (Bozza)

Facciamo solo la prima estensione.

$$\begin{array}{ccc}
 N^0 & \xrightarrow{q.i.} & M^0 \\
 \vdots & & \downarrow g \\
 K^0 & \xrightarrow[q]{q.i.} & L
 \end{array}$$

per fare ciò consideriamo il commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 C(\pi g)[-1] & \xrightarrow{K} & M^0 & \xrightarrow{\pi g} & C(f) & \rightarrow & C(\pi g) \\
 \downarrow h & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \pi \\
 K^0 & \xrightarrow[f]{q.i.} & L^0 & \xrightarrow{\pi} & C(f) & \rightarrow & K(A)^0
 \end{array}$$

dove  $K$  è  $S(\pi g)[-1]$ , invece  $h$  è costruito come segue,  $h(m^i, k^i, l^{i-1}) = -k^i$

$$C(\pi g)[-1]^i = C(\pi g)^{i-1}$$

Fatto ciò si verifica che il quadrato è commutativo modulo omotopia.  $gk - fh = Xd + dX$ ,  $X^i(m^i, k^i, l^{i-1}) = -l^{i-1}$

e poi bisogna provare che  $K$  è un quasi-isomorfismo. Questo segue dal fatto che  $f$  è un q.i. così  $C(f)$  è aciclico e dal lemma.



per l'ultima condizione sia  $f: K^0 \rightarrow L^0, s: L^0 \rightarrow \bar{L}^0$   
 $sf = sg \Rightarrow s(f-g) = 0$

$\{h^i: K^i \rightarrow \bar{L}^{i-1}\}$  un'omotopia tra  $sf$  e zero. Allora.

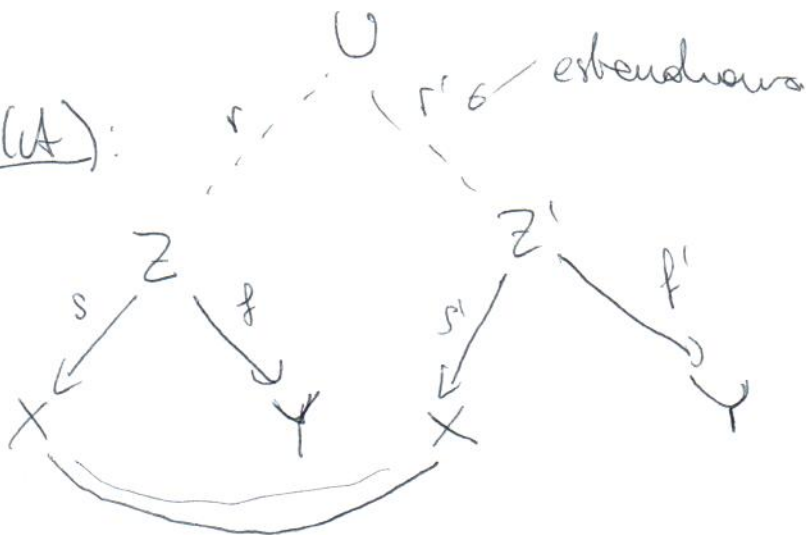
$$\begin{array}{ccccc} C(S)[-1] & \xrightarrow{g(S)[-1]} & L^0 & \xrightarrow{s} & \bar{L}^0 \\ \parallel & & \uparrow f & & \\ C(S)[-1] & \xleftarrow{g} & K^0 & \xleftarrow{h} & C(g)[-1] \end{array}$$

con  $g^i: K^i \rightarrow C(S)[-1]^i = L^i \oplus \bar{L}^{i-1}$   
 $k^i \rightarrow (f^i(k^i), -h^i(k^i))$

e per premessa  $t = g(g)[-1] \Rightarrow tf = tg(S)[-1] = 0$   
 perché  $tg = 0$

Additivita di  $D(A)$ :

Sono  $\varphi, \varphi'$



$\varphi + \varphi' :=$

