Seminario: (Categorie derivate)

Def. Una categoria $\mathcal{A}$ si dice abeliana se:

additiva:

1) $\forall\, X,Y \in Ob(\mathcal{A}) \Rightarrow Hom(X,Y)$ è un gruppo abeliano e la composizione è bilineare.
2) $\exists\, 0 \in Ob(\mathcal{A})$ i.e., $Hom(0,X)=0$ e $Hom(X,0)=0 \quad \forall\, X \in Ob(\mathcal{A})$
3) $\forall\, X_1, X_2 \in Ob(\mathcal{A}) \;\exists\; X_1 \oplus X_2$ e $X_1 \times X_2$

4) i) $\forall\, \varphi \in Hom(X,Y) \;\exists\; Ker\,\varphi$, $coker\,\varphi$.

$$\begin{tikzcd} Ker\,\varphi \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ & Z \arrow[ul, dashed, "\exists"] \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

ii) Ogni monomorfismo è il kernel del suo cokernel e ogni epimorfismo è il cokernel del suo kernel.

iii) ogni $X \xrightarrow{\varphi} Y$ fattorizza tramite I.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "epi"'] & & Y \\ & I \arrow[ur, "mono"'] & \end{tikzcd}$$

A questo punto $\mathcal{A} \rightsquigarrow Kom(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd} A^\bullet: \arrow[d, "h"'] & \cdots \arrow[r] & A^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "h^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "h^0"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "h^1"] & \cdots \\ B^\bullet & \cdots \arrow[r] & B^{-1} \arrow[r] & B^0 \arrow[r] & B^1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

$d^2=0$

Def: $H^i(A^\bullet) := coker\left(I^i \xrightarrow{\tilde{a}_i} Ker\, d^i\right)$

$$\begin{tikzcd} A^{i-1} \arrow[rr, "d^{i-1}"] \arrow[dr, "epi"'] & & A^i \\ & I^i \arrow[ur, "a_i"', "mono"] & \end{tikzcd}$$

$H(h): H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet)$

$$\begin{tikzcd} I_A^i \arrow[r, "\tilde{a}_i"] & Ker\, d^i \arrow[r] \arrow[d, "i"] \arrow[ddd, bend left=60, "\exists"] & coker\, d^i \arrow[ddd, dashed, "\exists!\, H^i(h)"] \\ A^{i-1} \arrow[u, "epi"] \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "h"] & A^i \arrow[r] \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "k^i"'] & A^{i+1} \arrow[dl, "k^{i+1}"'] \\ B^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d] & B^i \arrow[r] & B^{i+1} \\ I_B^i \arrow[r, "\tilde{b}_i"] & Ker\, d^i \arrow[r] \arrow[u, "mono"] & coker\, d^i \end{tikzcd}$$

Def: $h: A^\circ \to B^\circ$ si dice quasi-isomorfismo se $H(h)$ è un isomorfismo.

Def: (omotopia) $\psi \sim \varphi$ se $\psi - \varphi = dk + kd$ dove $k: k^i: A^i \to B^{i-1}$.

Oss $\sim$ è una relazione d'equiv.

Lemma:

$\psi \sim \varphi \Rightarrow H(\psi) = H(\varphi)$.

Dim: ~~ved~~ $\psi \sim 0 \Rightarrow H(\psi) = 0$ (vedi disegno).

H^i è un funtore additivo. ■

L'idea ora è quella di costruire una categoria in cui i quasi-iso diventano iso.

Def: La categoria derivata di $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ è il dato di $Q: D(\mathcal{A}) \to \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ soddisfacente la seguente proprietà universale:

$\forall\ F: \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ trasformate quasi-iso in iso

$\exists!\ G$ t.c.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Kom}\,\mathcal{A} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "Q"'] & & \mathcal{B} \\ & D(\mathcal{A}) \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

Esistenza tramite localizzazione.

In generale data una categoria $\mathcal{B}$ e una classe di morfismi $S \subset \mathrm{Mor}\,\mathcal{B}$ posso costruire la localizzazione $\mathcal{B}[S^{-1}]$

$$Q: \mathcal{B} \to \mathcal{B}[S^{-1}].$$

i) $\mathrm{Ob}\,\mathcal{B}[S^{-1}] = \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ $\quad$ Q è l'identità sugli oggetti

Per costruire i morfismi introduciamo alcuni oggetti:

a) $\forall\ s: X \to Y$ introduciamo la variabile formale $x_s: X \leftarrow Y$.

b) costruiamo un grafo orientato Γ come segue:

i) i vertici di Γ sono gli oggetti di $\mathcal{B}$

ii) gli archi sono i morfismi $+\ x_s$

c) Un cammino in Γ è una sequenza finita di archi...

d) Un morfismo in $\mathcal{B}[S^{-1}]$ è la classe di equivalenza di ~~tra~~ cammini con stesso inizio e stessa fine. Dove le relazioni sono del tipo seguente:

- due frecce consecutive possono essere sostituite con la loro composizione
- $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{x_s} X \sim X \xrightarrow{id} X \qquad Y \xrightarrow{x_s} X \xrightarrow{s} Y \sim Y \xrightarrow{id} Y$

La composizione si fa congiungendo due cammini.

Teorema $\exists$ di $D(\mathcal{A})$ $\quad \mathcal{B} = Kom(\mathcal{A})$

Basta prendere $S =$ quasi-iso e porre $G(x_s) = F(s)^{-1}$.

Problema: Capire meglio com'è fatta $D(\mathcal{A})$. In generale $\mathcal{B}[S^{-1}]$;
(I morfismi a priori sono cose del tipo $x_{s_1} f_1 x_{s_2} f_2 x_{s_3} f_3 \cdots$)
Ci vogliamo delle proprietà su S.

Def (sistema localizzante)
Una classe di morfismi $S \subset Mor\,\mathcal{B}$ è detta essere "localizzante" se le seguenti:

1) $id_X \in S$ $\forall X \in Ob\,\mathcal{B}$ e S è chiuso sotto composizione
2) Condizioni d'estensione:
$\forall f \in Mor\,\mathcal{B}$, $s \in S$ $\exists g \in Mor\,\mathcal{B}$ e $t \in S$ t.c.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} W & Z \arrow[l, "g"'] \\ X \arrow[u, "t"] & Y \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd} \right)$$

alternative?

3) Siano $f, g \in Hom(X, Y)$
$\exists s \in S$ con $sf = sg$ è equivalente a $\exists t \in S$ con $ft = gt$.

Oss: da sx si ha $ft = sg \Rightarrow x_s f t x_t = x_s s g x_t \Rightarrow$
$\Rightarrow x_s f = g x_t$

Oss: I quasi-iso in $Kom(\mathcal{A})$ non sono un sistema localizzante.

Lemma: (pag 149 G-M)
S loc. in $\mathcal{B}$. Allora $\mathcal{B}[S^{-1}]$ può essere descritto come segue:
$$Ob(\mathcal{B}[S^{-1}]) = Ob\,\mathcal{B} \quad e$$
a) un morfismo $X \to Y$ in $\mathcal{B}[S^{-1}]$ è una classe di "tetti":

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

dove due tetti sono equivalenti se $(s,f) \sim (t,g) \Leftrightarrow \exists$ un terzo tetto

$$\begin{tikzcd} & & X'' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f"'] & & X''' \arrow[dlll, "t"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & & & Y \end{tikzcd}$$

che forma un diagramma commutativo. ($id: X \to X$ è la classe di $\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & X \end{tikzcd}$)

b) La composizione di due morfismi (s,f) e (t,g) è la classe del tetto (st', gf') ottenuto per estensione

$$\begin{tikzcd} & & Z \arrow[dl, dashed, "t'"'] \arrow[dr, dashed, "f'"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} & X'' \arrow[dl, "st'"'] \arrow[dr, "gf'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Oss: I quasi-isomorfismi non sono un sistema localizzante.*
Dobbiamo introdurre la categoria $K(\mathcal{A})$ dei complessi in cui i morfismi sono considerati a meno di omotopia.

$M = \mathbb{Z}_2$ come $\mathbb{Z}$-moduli
$N = \mathbb{Z}_2$

* Controesempio $Ext^i(M,N) \neq 0$.

Tecniche: Coni e cilindri di un morfismo:

$\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$

Def: Sia $f: K^\circ \to L^\circ$. Un cono di f è il seguente complesso:

$$C(f)^\circ : \quad C(f)^i = K[1]^i \oplus L^i \quad , \; d_{C(f)} = (-d_K \,, f + d_L)$$

in notazione matriciale $\begin{pmatrix} d_{K[1]} & 0 \\ f[1] & d_L \end{pmatrix} \Rightarrow d^2_{C(f)} = 0$

Def: $f: K^\circ \to L^\circ$. Il cilindro di f è il seguente

$$Cyl(f)^\circ \qquad Cyl(f)^i = K^i \oplus K[1]^i \oplus L^i$$

$$d^i_{Cyl(f)} = \left(d_K - id_{K[1]} , - d_{K[1]} , f_{K[1]} + d_L\right)$$

Lemma:

$\forall\, f: K^\circ \to L^\circ$ morfismo di complessi si ha il seguente diagramma commutativo con righe esatte.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & L^\circ \arrow[r, "\tilde{\pi} = (0, id)"] \arrow[d, "\alpha = (0,0,id)", "\tilde{f}"'] & C(f) \arrow[r, "\pi_1 = \delta"] \arrow[d, equal] & K[1]^\circ \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^\circ \arrow[r, "(id,0,0)"] \arrow[d, equal] & Cyl(f) \arrow[r, "\pi = (\pi_2, \pi_3)"] \arrow[d, "(f + 0 + id) = \beta"] & C(f) \arrow[r] & 0 & \\
 & K^\circ \arrow[r, "f"] & L^\circ & & &
\end{tikzcd}$$

tale che α e β sono quasi-isomorfismi: di più $\beta\alpha = id_L$ e $\alpha\beta$ è omotopa all' $id_{Cyl(f)}$. Così che $Cyl(f)$ e L° sono canonicamente isomorfi nella categoria derivata.

Dim: Tutto facile fino all'omotopia. Qui basta definire

$h^i : Cyl(f)^i \to Cyl(f)^{i-1}$ come

$(k^i, k^{i+1}, l^i) \mapsto (0, k^i, 0)$ così si ha $\alpha\beta = id_{Cyl(f)} - (dh + hd)$ ∎

Categoria derivata come localizzazione della categoria omotopa

Prop:
La localizzazione di $K(\mathcal{A})$ via quasi-iso. è canonicamente isomorfa a $D(\mathcal{A})$.

Dim:
Denotiamo $\tilde{D}(\mathcal{A})$ la loc. di $K(\mathcal{A})$. La composizione:

$$Kom(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{A}) \longrightarrow \tilde{D}(\mathcal{A})$$

porta quasi-iso in iso per cui deve fattorizzare.

$$\begin{tikzcd}
Kom(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "Q"'] & K(\mathcal{A}) \arrow[r] & \tilde{D}(\mathcal{A}) \\
D(\mathcal{A}) \arrow[urr, "\exists ! G"'] & &
\end{tikzcd}$$

ovviamente G è l'id sugli oggetti ed è suriettivo sui morfismi. Resta da mostrare l'iniettività. Esso segue dal lemma:

Lemma:
$f, g : K^\circ \longrightarrow L^\circ$ omotopi. Allora $Q(f) = Q(g)$ in $D(\mathcal{A})$.

Dim:
Sia $f = g + dh + hd$. Allora definiamo $c(h) : C(f) \to C(g)$ tramite $C(h) = (id_{K[1]}, id_{L} + h_{K[1]})$ (morfismo di complessi)

similmente $cyl(h) = (id_{K^\circ}, id_{K[1]^\circ}, id_{L^\circ} + h_{K[1]})$

Considerando il diagramma indotto dalla prima riga del lemma.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\hat{\pi}"] \arrow[d, equal] & C(f) \arrow[r, "\delta(f)"] \arrow[d, "C(h)"] & K[1]^\circ \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & C(g) \arrow[r, "\delta(g)"] & K[1]^\circ \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

esso è commutativo

allora applicando il lemma dei 5 alle corrispondenti successioni esatte lunghe di coomologia (vedi G-M pag 120) si ha:

$$\begin{tikzcd}
H^{i-1}(K[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(C(f)) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(K[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{i+1}(L) \\
H^{i-1}(K[1]) \arrow[r] & H^i(L) \arrow[r] & H^i(C(g)) \arrow[r] & H^i(K[1]) \arrow[r] & H^{i+1}(L)
\end{tikzcd}$$

si ha $H^i(C(f)) \xrightarrow[\sim]{H^i(C(h))} H^i(C(g))$ quindi $C(h)$ è un quasi-iso. Stessa cosa per $Cyl(h)$.

A questo punto consideriamo il seguente diagramma.

$$\begin{tikzcd}
& L^\circ \arrow[d, "\alpha_f"] \\
K \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\tilde{f} = (id, 0, 0)"'] \arrow[d] & Cyl(f) \arrow[d, "cyl(h)"] \\
K^\circ \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[dr, "g"'] & Cyl(g) \arrow[d, "\beta_g"] \\
& L
\end{tikzcd}$$

— non commuta.

Ma in $D(A)$ il diagramma diventa commutativo perchè $Q(\alpha_f)$ e $Q(\beta_f)$ sono inversi, così che $f = \beta_f \circ \tilde{f} \Rightarrow Q(f) = Q(\beta_f) \circ Q(\tilde{f})$ e $Q(\tilde{f}) = Q(\alpha_f) \circ Q(f)$.

A questo punto tutto segue dal fatto che $\beta_g \, cyl(h) \, \alpha_f = id_L$.

$\blacksquare$

<u>Teorema:</u>
La classe dei quasi-isomorfismi in $K(\mathcal{A})$ è localizzante.

<u>Dim:</u> (Bozza)
Facciamo solo la prima estensione:

$$\begin{tikzcd}
N^\circ \arrow[r, dashed, "q.iso"'] \arrow[d, dotted] & M^\circ \arrow[d, "g"] \\
K^\circ \arrow[r, "q.iso"', "f"] & L
\end{tikzcd}$$

per fare ciò consideriamo il commutativo:

$$\begin{tikzcd}
C(\pi g)[-1] \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"] & M^\circ \arrow[r, "\pi g"] \arrow[d, "g"] & C(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C(\pi g) \arrow[d, "h[1]"] \\
K^\circ \arrow[r, "q.iso", "f"'] & L^\circ \arrow[r, "\pi"] & C(f) \arrow[r] & K[1]^\circ
\end{tikzcd}$$

dove k è $\delta(\pi g)[-1]$, invece h è costruito come segue, $h(m^i, k^i, l^{i-1}) = -k^i$

$C(\pi g)[-1]^i = C(\pi g)^{i-1}$

Fatto ciò si verifica che il quadrato è commutativo <u>modulo omotopia</u>. $gk - fh = Xd + dX$, $X^i(m^i, k^i, l^{i-1}) = -l^{i-1}$

e poi bisogna provare che k è un quasi-isomorfismo. Questo segue dal fatto che f è un q.iso così $C(f)$ è aciclico e dal lemma.

$f: K^\bullet \to L^\bullet$, $s: L^\bullet \to T^\bullet$

per l'ultima condizione sia $sf = sg \Rightarrow s(f-g) = 0$

$\{h^i: K^i \to T^{i-1}\}$ un'omotopia tra sf e zero. Allora.

$$\begin{tikzcd}
C(s)[-1] \arrow[r, "\delta(s)[-1]"] & L^\bullet \arrow[r, "s"] & T^\bullet \\
C(s)[-1] \arrow[u, equal] & K^\bullet \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f"] & C(g)[-1] \arrow[l, "t"]
\end{tikzcd}$$

con $g^i: K^i \to C(s)[-1]^i = L^i \oplus T^{i-1}$

$k^i \to (f^i(k^i), -h^i(k^i))$

e poi prendiamo $t = \delta(g)[-1]$ $\Rightarrow tf = tg\delta(s)[-1] = 0$

poiché $tg = 0$

Additività di $D(\mathcal{A})$:

Siano φ, φ'

$$\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dl, dashed, "r"'] \arrow[dr, dashed, "r'"] & & \\
 & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Z' \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
X & & Y \quad X & & Y
\end{tikzcd}$$

estendiamo

$\varphi + \varphi' :=$

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "sr = s'r'"'] \arrow[dr, "g+g'"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

$g = fr$

$g' = f'r'$