(1) # Deformazioni di schemi I

Sia K un campo algebricamente chiuso

Tutti gli schemi considerati sono localmente noetheriani, separati e definiti su K

Tutti gli anelli sono commutativi e unitari, anche gli omomorfismi sono unitari.

Saremo spesso in considerazione la categoria

$\mathcal{A}^*$: - oggetti: K-algebre noetheriane locali con campo residuo K

- ~~omomorfism~~ morfismi: omomorfismi di K-algebre locali

e la sua sottocategoria completa

$\mathcal{A}$, i cui oggetti sono le K-algebre artiniane locali con campo residuo K.

__Def.__ Sia X uno schema algebrico e sia $S = \operatorname{Spec} A$ con $A \in ob(\mathcal{A}^*)$.

Una famiglia locale di deformazioni, o più brevemente una deformazione (locale), di X su S (o su A) è un diagramma cartesiano di schemi

$$\eta: \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \operatorname{Spec} K & \xrightarrow{s} & S \end{array}$$

dove π è un morfismo piatto e s è il punto chiuso di S

Se $A \in ob(\mathcal{A})$ la deformazione si dice infinitesimale e se $A = K[\varepsilon] := \frac{K[t]}{(t^2)}$ la deformazione si dice del primo ordine.

Un isomorfismo di deformazioni di X su S ~~da~~ η a ξ: $\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathcal{X}' \\ \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \operatorname{Spec} K & \rightarrow & S \end{array}$ è

un isomorfismo $\varphi: \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ tale che
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{X}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$
commuti.

Una deformazione di X su S si dice banale se è isomorfa a $\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X \times S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} K & \xrightarrow{s} & S \end{array}$

dove ~~$\times$~~ $\times$ indica il prodotto fibrato $\times_{\operatorname{Spec} K}$ (sarà lo stesso anche nel seguito).

X si dice ~~banale~~ rigido se ogni sua deformazione infinitesimale è banale.

Una deformazione infinitesimale di X su S si dice localmente banale se $\forall x \in X$ $\exists U_x$ intorno aperto t.c.
$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X}_{U_x} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$
è banale.

Oss: Quest'ultima definizione ha senso perché nel caso delle deformazioni infinitesimali $|X|$ è omeomorfo a $|\mathcal{X}|$ (con $|X|$ intendo lo spazio topologico soggiacente a X): ~~a volte~~ per definizione di deformazione X è isomorfo a $\mathcal{X}_s (:= \mathcal{X} \times_S \operatorname{Spec} K$, la fibra di π su s) ed è noto che $|\mathcal{X}_s| \simeq |\pi^{-1}(s)|$ (cfr. esercizio 2.3.10 di "Algebraic Geometry" di Hartshorne); se η è infinitesimale, $S = \operatorname{Spec} A$ con A K-algebra artiniana locale, quindi S è ~~...~~ un punto grasso, ovvero $|S| = \{s\}$ e $S_{red} = \operatorname{Spec} K$, pertanto $|\pi^{-1}(s)| = |\mathcal{X}|$ e quindi $|X| \simeq |\mathcal{X}_s| \simeq |\pi^{-1}(s)| = |\mathcal{X}|$.

Data una deformazione η di X su S e un morfismo di schemi $S' \to S$, dove $S' = \operatorname{Spec}(A')$ $A' \in ob(\mathcal{A}^*)$, ~~il cambio~~ si può definire una deformazione η' di X su S' per cambiamento di base
$$\eta' : \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \times_S S' \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r] & S' \end{tikzcd}$$

Questa operazione di cambiamento di base è funtoriale, nel senso che commuta con la composizione di morfismi, che il morfismo identità lascia η invariata e che deformazioni isomorfe vengono trasportate in deformazioni isomorfe.

Lemma 1 Se $X = \operatorname{Spec} B_0$ è uno schema affine e
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r] & S = \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$
è una sua deformazione infinitesimale, allora anche $\mathcal{X}$ è affine.

③

<u>dim.</u> (cenni)

<u>1° passo</u> $X \to X$ è un'immersione chiusa definita da un fascio di ideali nilpotenti.

È un fatto locale nel codominio, quindi si può assumere $X = \operatorname{Spec} B$.

Il diagramma cartesiano
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} B_0 & \longrightarrow & \operatorname{Spec} B \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{mor. piatto}} \\ \operatorname{Spec} K & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A \end{array}$$
corrisponde

al diagramma cartesiano (N.B. per essere più precisi lo si dovrebbe chiamare cocartesiano, però lo chiamerò, qui e anche nel seguito, cartesiano per analogia con ~~gli schemi~~ quello degli schemi)
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B_0 \\ {\scriptstyle \text{piatto}}\uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & K \end{array}$$
, quindi $B_0 \cong B \otimes_A K$.

Si consideri la successione esatta $0 \to m_A \to A \to K \to 0$ (m_A è l'ideale massimale di A), dato che B è piatto su A anche $0 \to m_A \otimes_A B \to B \to \underbrace{K \otimes_A B}_{B_0} \to 0$ è esatta,

~~dato che~~ da questa successione segue immediatamente la conclusione, considerato che $m_A \otimes_A B$ è un ideale nilpotente di B, visto che m_A è nilpotente (è una proprietà elementare degli anelli artiniani che il loro nilradicale sia nilpotente, cfr. Proposizione 8.4 Atiyah-Macdonald "Introduction to commutative algebra", e nel caso di un anello artiniano locale il nilradicale è l'ideale massimale).

<u>2° passo</u> Se $Z_0 \subset Z$ è un sottoschema chiuso definito da un fascio di ideali nilpotente $\tilde{N} \subset \mathcal{O}_Z$ e Z_0 è affine, allora Z è affine.

Sia ~~n~~ $r \geq 2$ il minimo intero per cui $N^r = (0)$.

Allora $Z = V(N^r) \supset V(N^{r-1}) \supset \ldots \supset V(N^1) = Z_0$ e pertanto basta il caso $r = 2$.

In questo caso $\tilde{N}$ è un fascio coerente di $\mathcal{O}_{Z_0}$-moduli (per lo stesso motivo per cui il nucleo di un'estensione $0 \to I \to A' \to A \to 0$ è un A-modulo) e quindi $H^1(Z, \tilde{N}) = H^1(Z_0, \tilde{N})$ ma $H^1(Z_0, \tilde{N}) = 0$ (cfr. Teorema III 3.5 di "Algebraic Geometry" di Hartshorne)

Dato che Z_0 è affine, $Z_0 = \mathrm{Spec}(R_0)$ per qualche R_0, allora
$0 \to H^0(Z, \tilde{N}) \to R \to R_0 \to 0$ è esatta, dove $R := H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$.
Si ponga $Z' := \mathrm{Spec}\, R$, dalla definizione segue che esiste uno Z-morfismo $\theta: Z \to Z'$ e si può dimostrare che tale morfismo è un isomorfismo
(per maggiori dettagli si veda la dimostrazione del Lemma 1.2.3 di "Deformations of Algebraic Schemes" di Sernesi).

~~Corollario~~ Oss. Una conseguenza immediata del lemma è il fatto che invece delle deformazioni infinitesimali di schemi affini si possono studiare quelle di algebre:
Sia B_0 una K-algebra una sua deformazione (infinitesimale) su $A \in Ob(\mathcal{A})$ è un diagramma cartesiano di K-algebre

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & B_0 \\ A \arrow[u] \arrow[r] & K \arrow[u] \end{tikzcd}$$

con $A \to B$ piatto.

Equivalentemente è un omomorfismo piatto di K-algebre $A \to B$ + un isomorfismo $B_0 \xrightarrow{\sim} B \otimes_A K$. A volte, per brevità, mi limiterò a dare l'omomorfismo piatto $A \to B$.

Data un'altra deformazione $A \to B'$ di B_0 su A, un isomorfismo di deformazioni è un omomorfismo di K-algebre $\varphi: B \to B'$ tale che

$$\begin{tikzcd} & B_0 & \\ B \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi"] & & B' \arrow[ul] \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

commuti.

Un tale φ è automaticamente un isomorfismo per il seguente lemma.

Lemma 2: Sia R un anello, I un ideale nilpotente e $f: F \to G$ un omomorfismo di R-algebre con G piatta e tale che $\bar{f}: \frac{F}{IF} \to \frac{G}{IG}$ è un isomorfismo,

allora f è un isomorfismo ~~(Nel nostro cas~~
(Nel nostro caso abbiamo $R = A$, $I = m_A$ che è nilpotente come già osservato, $F = B$, $G = B'$
e $\frac{F}{IF} = \frac{B}{m_A B} \cong B_0 \cong \frac{B'}{m_A B'} = \frac{G}{IG}$)

⑤
<u>dim</u>. Sia $N = \mathrm{coker}\, f$

$F \to G \to N \to 0$ è esatta, quindi tensorizzando per R/I si ottiene
$\frac{F}{IF} \to \frac{G}{IG} \to \frac{N}{IN} \to 0$ esatta, quindi $\frac{N}{IN} = 0$ e $N = 0$ per
il lemma di Nakayama [N.B. Durante il seminario era parso che non si
potesse applicare senza ulteriori ipotesi su R ($\mathrm{Im}\, F \in G$) però non è così, se I è nilpotente
vale per ogni anello ~~commutativo unitario~~ e per ogni modulo senza bisogno dell'ipotesi ~~[illegible]~~
che sia finitamente generato, infatti $IM = M \Rightarrow \forall m \in M$ $m = i_1 m_1$ e $m_1 = i_2 m_2 \dots$
iterando su m_i si ottiene $\forall n \geq 1$ $m = (i_1 \dots i_n) m_n$ ma I è nilpotente $\Rightarrow \exists K$ t.c. $I^K = (0)$
$\Rightarrow m = (i_1 \dots i_K) m_K = 0 \cdot m_K = 0 \Rightarrow M = 0$]

Sia $K = \mathrm{Ker}\, f$, allora $0 \to K \to F \to G \to 0$ è esatta (visto che $N = 0$) e
tensorizzando per R/I si ottiene $\underset{\substack{G \text{ è piatto} \to \| \\ 0}}{\mathrm{Tor}_1^R(G, R/I)} \to \frac{K}{IK} \to \frac{F}{IF} \to \frac{G}{IG} \to 0$ esatta

quindi, come sopra, $\frac{K}{IK} = 0$ e, per Nakayama, $K = 0$.

Def.
Una K-algebra B_0 si dice rigida se è tale $\mathrm{Spec}\, B_0$

Il prossimo obiettivo è mostrare che ogni varietà affine nonsingolare è
rigida. per farlo però serve una ~~divagazione~~ breve excursus sulla liscezza
e sui sollevamenti.

<u>Def.</u> Una K-algebra A si dice liscia se è essenzialmente di tipo finito (ovvero
localizzazione di un'algebra di tipo finito) ed è formalmente liscia,
ovvero per ogni estensione di K-algebre $0 \to I \to B' \to B \to 0$ e per ogni K-omomorfismo $\varphi : A \to B$ esiste un sollevamento di φ $\varphi' : A \to B'$.

Lemma 3 Siano $0\to I\to B'\xrightarrow{\pi} B\to 0$ un'estensione di R-algebre, A una R-algebra e $f: A\to B$ un R-omomorfismo, allora l'insieme dei sollevamenti $g: A\to B'$ di f o è vuoto o è un torsore di $Der_R(A,I)$.

dim. Supponiamo che $\exists\ g: A\to B'$ sollevamento di f.

Sia $g': A\to B'$ una qualunque funzione insiemistica e sia $\vartheta = g-g'$.

Mostrerò che g' è un sollevamento di f se e solo $\vartheta\in Der_R(A,I)$, provando così che l'azione di $Der_R(A,I)$ sull'insieme dei sollevamenti definita come $(\vartheta,g)\to g+\vartheta$ è semplicemente transitiva:

g' è un sollevamento di f se e solo se valgono

(a) g' è un omomorfismo di R-moduli

(b) $\pi\circ g' = f$

(c) $g'(xy)=g'(x)g'(y)$

Queste proprietà di g' equivalgono alle seguenti proprietà di ϑ:

(i) ϑ è un omomorfismo di R-moduli

(ii) $\pi\circ\vartheta=0$, ovvero $\vartheta: A\to I\subseteq B'$

(iii) $\vartheta(xy)= g(xy)-g'(xy) = g(x)g(y) + g(x)g'(y) - g(x)g'(y) - g'(x)g'(y) = g(x)\vartheta(y)+\vartheta(x)g'(y) =$

$= g(x)\vartheta(y) + \vartheta(x)(g(y)+\vartheta(y)) \overset{I^2=(0)}{=} g(x)\vartheta(y)+\vartheta(y)g(y) \overset{\vartheta(A)\in I}{\iff} \vartheta(xy)=\vartheta(x)f(y)+\vartheta(y)f(x)$.

È chiaro che (i)(ii)(iii) sono equivalenti a $\vartheta\in Der_R(A,I)$.

Cor. Sia $\pi: X\to S=Spec(A)$ un morfismo di schemi e $\phi: X\hookrightarrow \mathcal{X}$ un'immersione chiusa definita da un fascio di ideali $\mathcal{J}\subset O_{\mathcal{X}}$ t.c. $\mathcal{J}^2=0$.

Allora c'è una corrispondenza biunivoca

$\{S\text{-automorfismi di } \mathcal{X} \text{ che inducono l'identità su } X\} \longleftrightarrow Hom_{O_X}(\phi^*\Omega^1_{\mathcal{X}/S}, \mathcal{J})$.

dim. È una questione locale, si può assumere $\mathcal{X} = Spec\, B'$, $X = Spec\, B$ e $\mathcal{J}=\tilde{I}$.

L'ipotesi è equivalente ad avere un'estensione di R-algebre $0\to I\to B'\xrightarrow{\phi}B\to 0$ e un omomorfismo $\pi: A\to B'$.

È chiaro che

$\{S\text{-automorfismi di } X \text{ che inducono l'identità su } X\} = \{\cancel{A\text{-automorfismi}}$

$= \{A\text{-automorfismi } f: B' \to B' \text{ che sollevano } \underset{\text{perché } 1_{B'}^{\phi}}{\not\phi}\} \overset{\text{Lemma 3}}{\underset{1a?}{\longleftrightarrow}} Der_A(B, I) = Hom_{B'}(\Omega_{B'/A}, I) =$

$= Hom_B(\Omega_{B'/A} \otimes_{B'} B, I) = Hom_{O_X}(\phi^* \Omega^1_{X/S}, J)$ ∎

Prop. (Proprietà del sollevamento infinitesimale). Sia $X = Spec\, A$ una varietà affine nonsingolare, allora A è una K-algebra liscia.

dim. Chiaramente basta dimostrare che A è formalmente liscia, dato che $A = \frac{K[x_1, \dots x_n]}{J}$ per qualche n. Poniamo $P := K[x_1, \dots, x_n]$.

~~Supponiamo~~ Sia $0 \to I \to B' \xrightarrow{\pi} B \to 0$ un'estensione di K-algebre e sia $f: A \to B$ un omomorfismo di K-algebre. Bisogna mostrare che esiste $g: A \to B'$ t.c. $\pi \circ g = f$.

1° passo $\exists h: P \to B'$ t.c.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r] & P \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commuti e tale che $h_{|J}: J \to I$ induce un omomorfismo di A-moduli $\bar{h}: J/J^2 \to I$.

L'esistenza di $h: P \to B'$ ~~[illegible]~~ tale che il diagramma commuti è ovvia, dato che P è libera. Dato che $I^2 = 0$ è ovvio anche che induca $\bar{h}: J/J^2 \to I$, il fatto che $\bar{h}$ sia A-lineare è di verifica immediata.

2° passo $Hom_P(\Omega_{P/K}, I)$ suriettà su $Hom_A(J/J^2, I)$.

Dato che X è non singolare la successione conormale ~~$0 \to J/J^2 \to Hom_A(\Omega_{P/K} \otimes_P A, I)$~~

$0 \to J/J^2 \to \Omega^1_{P/K} \otimes_P A \to \Omega^1_{A/K} \to 0$ è esatta e $\Omega^1_{A/K}$ è libero (cfr. teorema II 8.17 'Algebraic Geometry' di Hartshorne).

Pertanto anche la seguente successione è esatta:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/K}, I) \to \mathrm{Hom}_A(\Omega_{P/K} \otimes_P A, I) \to \mathrm{Hom}_A(J/J^2, I) \to \mathrm{Ext}^1_A(\Omega_{A/K}, I)$$

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{P/K} \otimes_P A, I) = \mathrm{Hom}_P(\Omega_{P/K}, I) \qquad \mathrm{Ext}^1_A(\Omega_{A/K}, I) = 0 \to \Omega_{A/K} \text{ libero}$$

3° passo Sia $\vartheta \in \mathrm{Der}_K(P, I) = \mathrm{Hom}_P(\Omega_{P/K}, I)$ nella preimmagine di $\bar{h}$, allora $h' = h - \vartheta$ induce g.

Dal lemma 3 segue che h' è un sollevamento di $f \circ g$, perciò basta mostrare che $h'(J) = 0$ per concludere.

Sia $j \in J$ $h'(j) = h(j) - \vartheta(j) = h(j) - \bar{h}(j + J^2) = h(j) - h(j) = 0$ q.e.d.

Teorema 1 Ogni K-algebra liscia B_0 è rigida. In particolare ogni varietà affine nonsingolare X è rigida.

dim. L'ultima affermazione è implicata immediatamente dalla prima e dalle proprietà del sollevamento infinitesimale.

Sia $\eta_0 :$
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B_0 \\ f\uparrow & & \uparrow \\ K[\varepsilon] & \longrightarrow & K \end{array}$$
una deformazione del primo ordine di B.

Si consideri
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B_0 \\ f\uparrow & & \uparrow \\ K[\varepsilon] & \longrightarrow & B_0 \otimes K[\varepsilon] = B_0[\varepsilon] \end{array}$$

f è liscia dato che è piatta con fibra liscia (B_0).

È evidente che la freccia verticale destra è una $K[\varepsilon]$-estensione di B_0.

Quindi esiste un $K[\varepsilon]$-omomorfismo $\phi : B \to B_0[\varepsilon]$ tale che
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B_0 \\ f\uparrow & \searrow^{\phi} & \uparrow \\ K[\varepsilon] & \longrightarrow & B_0[\varepsilon] \end{array}$$
commuti e pertanto ϕ definisce un isomorfismo di deformazioni e η_0 è banale.

Sia $\eta :$
$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B_0 \\ f\uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & K \end{array}$$
una deformazione infinitesimale qualunque di B_0

Si può procedere per induzione su $d := \dim_K(A)$.

⑨ Il caso $d=2$ è quello delle deformazioni del primo ordine.
Sia $d \geq 3$ e si consideri l'estensione piccola $0 \to (t) \to A \to A' \to 0$.

Si consideri il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & B \otimes_A A' \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B_0 \otimes_k A \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Segue dall'ipotesi induttiva che $B \otimes_A A' \cong B_0 \otimes_k A'$, quindi il diagramma diventa

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & B_0 \otimes_k A' \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B_0 \otimes_k A \arrow[u] \end{tikzcd}$$

e si può procedere esattamente come per le deformazioni del primo ordine.
c.v.d.

<u>Cor.</u> Ogni deformazione infinitesimale di una varietà non singolare è localmente banale.

<u>Teorema 2</u> (Corrispondenza di Kodaira-Spencer)
Sia X una varietà algebrica. Esiste una corrispondenza biunivoca, detta di Kodaira-Spencer,

$$K: \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di isomorfismo di deformazioni} \\ \text{del primo ordine localmente banali di } X \end{array} \right\} \longleftrightarrow H^1(X, T_X),$$

dove $T_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}, \mathcal{O}_X)$ è il fascio tangente.

Se X è non singolare, la corrispondenza biunivoca diventa

$$K: \left\{ \begin{array}{l} \text{classi di isomorfismo di deformazioni} \\ \text{del primo ordine di } X \end{array} \right\} \longleftrightarrow H^1(X, T_X).$$

<u>dim.</u>
Sia

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} k(\varepsilon) \end{tikzcd}$$

una deformazione del primo ordine di X localmente banale. ~~Banale~~

Sia $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento di aperti affini di X. Per ipotesi $\mathcal{X}_{|U_i}$ è banale $\forall\, i\in I$. Sia $\vartheta_i : U_i \times \operatorname{Spec} K[\varepsilon] \to \mathcal{X}_{|U_i}$ un isomorfismo di deformazioni $\forall\, i\in I$ (come usuale $U_{ij} := U_i \cap U_j$).
Dal corollario del lemma 3 segue che ogni ϑ_{ij} si può vedere come un elemento d_{ij} di $\Gamma(U_{ij}, \mathcal{H}om(\Omega^1_{\mathcal{X}/\operatorname{Spec} K[\varepsilon]} \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)) = \Gamma(U_{ij}, \mathcal{T}_X)$.

$\forall\, i,j,k\in I$ $\vartheta_{ij}\vartheta_{jk}\vartheta_{ik}^{-1}$ è l'identità su $U_{ijk} = U_i\cap U_j\cap U_k$, quindi $d_{ij}+d_{jk}-d_{ik}=0$,

cioè $\{d_{ij}\}$ è un 1-cociclo di Čech e definisce un elemento di $H^1(X,\mathcal{T}_X)$.
Si verifica facilmente che tale elemento è indipendente dalla scelta di $\mathcal{U}$ e dei ϑ_i, nonché dalla scelta di η nella sua classe di isomorfismo (per qualche dettaglio in più si veda la dimostrazione della proposizione 1.2.9 ~~del libro~~ "Deformations of algebraic schemes" di Sernesi).
Viceversa dato $\vartheta\in H^1(X,\mathcal{T}_X)$ si può procedere ~~a~~ ritroso rappresentando ϑ come un 1-cociclo $\{d_{ij}\}\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{T}_X)$ per un qualche ricoprimento $\mathcal{U}$ di X, a ogni d_{ij} si associa un automorfismo ϑ_{ij} di $U_{ij}\times \operatorname{Spec}(K[\varepsilon])$ e i ϑ_{ij} permettono di incollare gli schemi $U_i \times \operatorname{Spec}(K[\varepsilon])$ ottenendo uno $\operatorname{Spec}(K[\varepsilon])$-schema $\mathcal{X}$ che è lo schema totale di una deformazione del primo ordine localmente banale di X.

q.e.d.

Referenze:

B. Fantechi, "Elementary deformation theory"

R. Hartshorne, "Algebraic Geometry"

E. Sernesi, "An overview of classical deformation theory"

Idem, "Deformations of algebraic schemes"

M. Atiyah - I. Macdonald "Introduction to commutative algebra" (per le proprietà degli anelli artiniani)