Publications du Laboratoire de Combinatoire et d' Informatique Mathématique

16

Claudia Malvenuto

Produits et coproduits des fonctions quasi-symétriques et de l'algèbre des descentes

Départements de mathématiques et d'informatique

Université du Québec à Montréal

Publications du Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique

---

Responsable de la collection:

Srečko Brlek — e-mail: brlek@lacim.uqam.ca

LACIM, Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. Centre-Ville
Montréal, Qc. Canada
H3C 3P8.

Volumes parus.

1. Parallélisme: modèles et complexité, S. Brlek (ed.), Actes de colloque, ACFAS 89, 1990.
2. Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues, H. Décoste, 1990.
3. Étude des arbres hyperquaternaires, L. Laforest, 1990.
4. Contribution à l'étude des empilements, P. Lalonde, 1991.
5. Calcul combinatoire de séries indicatrices de cycles, I. Constantineau, 1991.
6. Notes On Schubert Polynomials, I. G. Macdonald, 1991.
7. Combinatoire des tableaux oscillants et des polynômes de Bessel, L. Favreau, 1991.
8. Réécritures dans l'algèbre de Lie libre, le groupe libre et l'algèbre associative libre, G. Melançon, 1991.
9. q-énumération de polyominos convexes, M. Bousquet-Mélou, 1991.
10. Atelier de combinatoire franco-québécois, J. Labelle, J.-G. Penaud (éd.), Mai 1991, Actes, 1992.
11. Séries formelles et combinatoire algébrique, P. Leroux, C. Reutenauer (éd.), Juin 1992, Actes, 1992.
12. Structures combinatoires et calcul symbolique, Y. Chiricota, 1993.
13. Aspects combinatoires des nombres de Stirling, des polynômes orthogonaux de Sheffer et de leurs q-analogues, A. de Medicis, 1993.
14. A theory of noncommutative determinants and characteristic functions of graphs I, I. M. Gelfand and V. S. Retakh; Matroids on chamber systems, I. M. Gelfand, A. V. Borovik, 1993.

..............................*suite en fin de volume*

Ce numéro constitue la publication d'une thèse soutenue devant jury, le 8 avril 1994, pour l'obtention Ph.D.

Composition du Jury

C. REUTENAUER	*UQAM*, directeur de recherche
R. BÉDARD	*UQAM*,
F. BERGERON	*UQAM*,
A. M. GARSIA	*University of California at San Diego*,
S. SUNDARAM	*University of Miami*

Dépôt légal, deuxième semestre 1994, Bibliothèque nationale du Québec.

ISBN 2-89276-132-8 LACIM Montréal

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique
Départements de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. Centre-Ville
Montréal, Qc.
Canada H3C 3P8

LACIM UQAM

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

par

CLAUDIA MALVENUTO

PRODUITS ET COPRODUITS DES FONCTIONS QUASI-SYMÉTRIQUES ET DE L'ALGÈBRE DES DESCENTES

NOVEMBRE 1993

Publications du Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique

15. Modèles mathématiques pour la synthèse des systèmes informatiques, S. Brlek (ed.), Actes de colloque, ACFAS 94, 1994.
16. Produits et coproduits des fonctions quasi-symétriques et de l'algèbre des descentes, Claudia Malvenuto, 1994.
17. Une interprétation combinatoire des approximants de Padé, Emmanuel Roblet, 1994.
18. Hyperbinomiales: doubles suites satisfaisant à des équations aux différences partielles de dimension et d'ordre deux de la forme $H(n,k)=p(n,k)H(n-1,k)+q(n,k)H(n-1,k-1)$, Pierre Théorêt, 1994.
19. Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes, François Bergeron, Gilbert Labelle, Pierre Leroux, 1994.
20. Axel Thue's papers on repetitions in words: a translation, Jean Berstel, 1994.

Produits et coproduits des fonctions quasi-symétriques et de l'algèbre des descentes

On étudie l'algèbre $QSym$ des fonctions quasi-symétriques. Avec le coproduit *externe* γ (qui étend le coproduit externe de l'algèbre Sym des fonctions symétriques), $QSym$ est une algèbre de Hopf. L'injection $Sym \to QSym$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. En tant qu'algèbre commutative, $QSym$ est librement engendrée. On trouve un ensemble de générateurs, indexé par les compositions de Lyndon, qui contient les fonctions symétriques sommes de puissances. Aussi le coproduit interne γ' de Sym (qui correspond au produit interne des caractères du groupe symétrique) s'étend à $QSym$, qui est une bigèbre par rapport à ce coproduit. On dualise l'algèbre de Hopf $(QSym,\cdot,\gamma)$ et la bigèbre $(QSym,\cdot,\gamma')$ pour obtenir l'algèbre de Hopf $(QSym^*,\Delta,\cdot)$ et la bigèbre $(QSym^*,\Delta,\Diamond)$. La première est isomorphe à une algèbre associative libre, vue comme algèbre de Hopf enveloppante de l'algèbre de Lie libre. La deuxième est, comme algèbre, l'algèbre des descentes de Solomon. Plus précisément, $(QSym^*,\Delta,\cdot) \cong (\Sigma,\Delta,*)$, avec le produit de convolution, et $(QSym^*,\Delta,\Diamond) \cong (\Sigma,\Delta,\cdot)$, la bigèbre des descentes de Solomon. Tous ces produits et coproduits de Σ s'étendent à $KS=\oplus_{n\geq 1}KS_n$.

Parallèlement, on reprend la théorie des P-partitions d'un ordre partiel P et de la fonction génératrice associée. L'automorphisme ω de Sym s'étend à un automorphisme ω de $QSym$ qui est (au signe près) l'antipode de l'algèbre de Hopf $QSym$. Il correspond à prendre l'ordre partiel dual d'un ordre donné. On donne aussi une interprétation pour le produit et pour le coproduit externe γ de $QSym$: ils correspondent respectivement à la réunion disjointe d'ordres partiels et à une certaine décomposition d'un ordre partiel en idéaux d'ordres. On démontre ensuite que si l'ensemble des extensions linéaires d'un ordre partiel est plaxiquement clos, alors l'ordre partiel est en fait une forme gauche d'étiquetage standard. Ce résultat est lié à une conjecture de Stanley. Enfin, on étend aux graphes étiquetés une construction de Schützenberger, l'évacuation, définie d'abord pour les tableaux de Young, élargie ensuite aux ensembles partiellement ordonnés à étiquetage naturel. On démontre que l'évacuation est une involution et que traînées et trajectoires dans l'évacuation d'un graphe deviennent trajectoires et traînées dans l'évacuation inverse.

TABLE DES MATIÈRES

Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique
Départements de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. Centre-Ville
Montréal, Qc.
Canada H3C 3P8

ISBN 2-89276-132-8

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

par

CLAUDIA MALVENUTO

PRODUITS ET COPRODUITS DES FONCTIONS QUASI-SYMÉTRIQUES ET DE L'ALGÈBRE DES DESCENTES

NOVEMBRE 1993

REMERCIEMENTS

Je remercie en premier mon directeur Christophe Reutenauer : j'ai eu la chance de pouvoir travailler avec une personne hors du commun, toujours bouillonnant d'idées, sensible, avec une profonde connaissance et une grande passion pour les mathématiques. Je le remercie pour sa disponibilité, pour la qualité de ses cours, pour toutes les conjectures et les suggestions dont il m'a fait part, et qui ont été essentielles à l'écriture de cette thèse. Je le remercie aussi pour sa patience et tout le temps qu'il a consacré à ce travail, finalement pour la rapidité et le soin qu'il a mis dans la correction du manuscript et, "last but not least", son soutien financier (CRSNG, Canada).

Je veux remercier Tony Machí et Claudio Procesi, pour m'avoir transmis leur amour pour l'algèbre. Je remercie toute l'équipe du LaCIM : c'est ici que j'ai découvert les plaisirs de la combinatoire. En particulier, merci aux directeurs des études avancés Manzoor Ahmad et Pierre Bouchard, au directeur du LaCIM Pierre Leroux, et à leurs secrétaires Manon&Manon, qui ont résolu de nombreaux problèmes pratiques et bureaucratiques.

Je remercie Adriano Garsia, qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être le rapporteur externe dans le jury de cette thèse, aussi bien que les autres membres du jury : Robert Bédard, François Bergeron, et Sheila Sundaram.

Je veut remercier Yves Chiricota, René Ferland, Pierre Fortier et Francesco Pappalardi, qui ont fait preuve d'une grande patience, et ne m'ont jamais réfusé de l'aide en informatique .

Un remerciement spécial à mes parents, Clara et Altiero, qui malgré l' éloignement, ont toujours été très présents. Merci surtout à toi, Francesco, car sans ton appui sentimental, moral, intellectuel, technique, je n'aurai jamais pu mener à terme ce travail.

Pour l'amitié et la chaleur qu'elles m'ont témoigné, je me rappellerai toujours de mes copines Anne de Médicis et Kathleen Pineau. Aussi je remercie pour leur sympathie : Andrea, Carla, les Čubrič, Yves Chiricota, les Dzięciolowski, Elena, Erik, Federica, Joan et Tony Geramita, Hélise, Henriette, Margaret et Ian Hugues, Leonardo, Ivan Maffezzini, Roberto Mantaci, Guy Melançon, Lamia Msalk, les Pedersen, Huguette et Paulo Ribenboim, Olivia Segovia, Madame Antonietta Sospirato, Sheila Sundaram, Denis Tanguay, Valerio, et beaucoup d'autres. Une pensée spéciale va à A. Milani qui, sans me dire un mot, m'a fait comprendre que je pouvais me passer de son existence. Toutes ces personnes non seulement ont rendu mon séjour au Canada agréable, mais ils m'en ont fait regretter le départ.

Je remercie le Consiglio Nazionale delle Ricerche pour son support financier.

Je dédie ce travail à Silvietta et aux mères et pères qui sont aux études.

RÉSUMÉ

On étudie l'algèbre $QSym$ des fonctions quasi-symétriques. Avec le coproduit *externe* γ (qui étend le coproduit externe de l'algèbre Sym des fonctions symétriques), $QSym$ est une algèbre de Hopf. L'injection $Sym \hookrightarrow QSym$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. En tant qu'algèbre commutative, $QSym$ est librement engendrée. On trouve un ensemble de générateurs, indexé par les compositions de Lyndon, qui contient les fonctions symétriques sommes de puissances. Aussi, le coproduit interne γ' de Sym (qui correspond au produit interne des caractères du groupe symétrique) s'étend à $QSym$, qui est une bigèbre par rapport à ce coproduit. On dualise l'algèbre de Hopf $(QSym, \cdot, \gamma)$ et la bigèbre $(QSym, \cdot, \gamma')$, pour obtenir l'algèbre de Hopf $(QSym^*, \Delta, \cdot)$ et la bigèbre $(QSym^*, \Delta, \diamond)$. La première est isomorphe à une algèbre associative libre, vue comme algèbre de Hopf enveloppante de l'algèbre de Lie libre. La deuxième est, comme algèbre, l'algèbre des descentes de Solomon. Plus précisement, $(QSym^*, \Delta, \cdot) \simeq (\Sigma, \Delta, \star)$, avec le produit de convolution, et $(QSym^*, \Delta, \diamond) \simeq (\Sigma, \Delta, \cdot)$, la bigèbre des descentes de Solomon. Tous ces produits et coproduits de Σ s'étendent à $KS = \oplus_{n \geq 1} KS_n$.

Parallèlement, on reprend la théorie des P-partitions d'un ordre partiel P et de la fonction génératrice associée. L'automorphisme ω de Sym, s'étend à un automorphisme ω de $QSym$, qui est (au signe près) l'antipode de l'algèbre de Hopf $QSym$. Il correspond à prendre l'ordre partiel dual d'un ordre donné. On donne une interprétation aussi pour le produit et pour le coproduit externe γ de $QSym$: ils correspondent respectivement à la réunion disjointe d'ordres partiels et à une certaine décomposition d'un ordre partiel en idéaux d'ordres.

On démontre ensuite que si l'ensemble des extensions linéaires d'un ordre partiel est plaxiquement clos, alors l'ordre partiel est en fait une forme gauche d'étiquetage standard. Ce résultat est lié à une conjecture de Stanley.

Enfin, on étend aux graphes étiquetés une construction de Schützenberger, l'évacuation, définie d'abord pour les tableaux de Young, élargie ensuite aux ensembles partiellement ordonnés à étiquetage naturel. On démontre que l'évacuation est une involution et que traînées et trajectoires dans l'évacuation d'un graphe deviennent trajectoires et traînées dans l'évacuation inverse.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les fonctions quasi-symétriques apparaissent dans le travail de Thomas [Tho], Stanley [Sta], [Sta1], Gessel [Ges], en relation avec l'énumeration de permutations, la correspondance de Robinson-Schensted, les décompositions réduites et les P-partitions. L'algèbre des descentes de Solomon Σ apparaît dans [Sol], et a été étudiée et généralisée dans plusieurs papiers: [B], [BBH], [GReu], [ManR], [Mos], [P]. Le but principal de ce travail est de mettre en dualité l'algèbre des fonctions quasi-symétriques et l'algèbre des descentes de Solomon, chacune avec leur produits et coproduits. L'historique de cette dualité est expliquée ci-après.

En 1972, Richard Stanley [Sta] introduit la notion de P-partitions, une généralisation des tableaux de Young semi-standards (ou partitions planaires) aux ensembles partiellement ordonnés P, et de la fonction génératrice associée, dénotée ici par $\Gamma(P)$. Ira Gessel reprend en 1984 l'étude des P-partitions dans [Ges], où il introduit la notion de P-partition r-partie, dans le but d'énumerer, entre autres, les r-tuplets de permutations dont les ensembles des descentes sont fixés et dont le produit est une permutation donnée. Il précise une propriété vérifiée par $\Gamma(P)$, la quasi-symétrie: une fonction en les variables totalement ordonnées X est quasi-symétrique si chaque fois que $x_1 < \ldots < x_k$ et $y_1 < \ldots < y_k$, les coefficients des monômes $x_1^{c_1} \ldots x_k^{c_k}$ et $y_1^{c_1} \ldots y_k^{c_k}$ sont égaux. L'ensemble $QSym$ des fonctions quasi-symétriques est une sur-algèbre de l'algèbre des fonctions symétriques. Gessel donne une décomposition remarquable de la fonction génératrice des P-partitions bi-parties, permettant de définir un coproduit, qui est en fait l'extension du coproduit interne γ' de l'algèbre Sym des fonctions symétriques. Son résultat se reformule ainsi: *l'algèbre Σ des descentes de Solomon Σ est naturellement le dual de la cogèbre $QSym$ avec le coproduit interne γ'.*

Nous nous sommes posés les questions suivantes (auxquelles le présent travail donne réponse): peut-on étendre à $QSym$ aussi le coproduit externe des fonctions symétriques? Quel sera le rapport entre cette cogèbre et l'algèbre des descentes? Peut-on définir sur Σ un produit autre que le produit de l'algèbre du groupe, tel que Σ soit encore isomorphe à l'algèbre duale de la cogèbre $QSym$ avec le coproduit externe ? Quel est l'effet sur les ordres partiels des opérations de $QSym$, si on les applique aux fonctions genératrices des P-partitions?

Dans le premier chapitre, on donne les définitions de compositions et partitions d'un entier, tableaux, de compositions et partitions conjuguées, aussi bien que de certaines opérations sur les compositions: la concaténation et la fusion. On décrit la bijection entre compositions de n et sous-ensembles de $[n-1]$. On donne les relations entre les descentes d'une composition et les descentes de la composition miroir et de la composition conjuguée.

Le chapitre 2 sert de rappel des définitions et propriétés fondamentales des algèbres, cogèbres, bigèbres et algèbres de Hopf. Aussi, on examine plus en détail deux structures d'algèbres de Hopf sur l'espace $K\langle A\rangle$ des polynômes non commutatifs en une infinité de variables A sur un corps K, c'est-à-dire l'algèbre de Hopf de concaténation et du mélange. Ces algèbres sont duales entre elles.

Dans le chapitre 3, on révise les définitions et les résultats standards sur l'algèbre Sym des fonctions symétriques en une infinité de variables commutatives X sur un anneau K. Si Y est un ensemble infini de variables disjoint de X, on considère la fonction symétrique g dans le nouvel ensemble de variables $X \cup Y$, dénotée par $g(x, y)$. Si on sépare dans $g(x, y)$ les variables X des variables Y, on trouve une décomposition $g(x, y) = \sum g_i(x)g'_i(y)$ dans laquelle les fonctions g_i et g'_i sont en fait symétriques. Il en résulte un coproduit γ, dit externe. De façon analogue, on obtient le coproduit interne γ' quand on décompose la fonction symétrique g calculée sur l'ensemble des variables $Z = XY$. Avec le coproduit externe, Sym est une algèbre (graduée) de Hopf commutative, dont l'antipode correspond à l'involution ω de Sym, qui associe les fonctions symétriques élementaires aux fonctions symétriques homogènes. Par rapport aux produit scalaire pour lequel les fonctions de Schur forment une base orthonormale, Sym est une algèbre de Hopf auto-duale (cf. Zelevinski [Z], Geissinger [Gei]). Si on prend le coproduit interne, Sym est une bigèbre commutative et cocommutative, dont l'algèbre duale est isomorphe à l'algèbre Sym avec le produit interne (cf. Thibon [Thi], Gessel [Ges]).

Dans le chapitre 4, nous introduisons la notion de fonction quasi-symétrique. Toujours, l'ensemble infini des variables commutatives X sera muni d'un ordre total. L'espace vectoriel $QSym$ est fermé par le produit usuel des séries formelles. Comme on l'a fait pour l'algèbre Sym, nous prenons un autre ensemble de variables Y disjoint de X et totalement ordonné. Sur $X \cup Y$ on considère l'ordre total où toute variable dans X est plus petite que toute variable dans Y. Il s'avère que si on décompose la fonction quasi-symétrique $g(x, y) = \sum g_i(x)g'_i(y)$ en séparant les variables de X et Y, les fonctions $g_i(x)$ et $g'_i(y)$ sont quasi- symétriques, ce qui donne un coproduit, qui est l'extension du coproduit externe γ de Sym. Avec ce coproduit, $QSym$ est une algèbre de Hopf graduée commutative, dont Sym est une sous-algèbre. Nous démontrons que, comme algèbre, $QSym$ est libre ; nous décrivons un système de générateurs algébriques, indexés par les compositions de Lyndon, qui contient les fonctions symétriques sommes de puissances: $QSym$ est donc aussi un module libre sur Sym (Corollaire 4.19). L'outil principal de cette preuve est un changement de base, obteu par logarithme, analogue au calcul développé par Garsia et Reutenauer [GReu].

Soit maintenant $Z = XY = X \times Y$, avec l'ordre lexicographique. Dans [Ges], Gessel démontre que la décomposition $g(xy) = \sum g_i(y)g'_i(x)$ de la fonction quasi-symétrique g en les variables Z fournit un coproduit sur $QSym$, qui étend le coproduit interne γ' de Sym. Avec ce coproduit, $QSym$ est une bigèbre. Les fonctions quasi-symétriques monomiales $M_C = \sum_{x_1<\ldots<x_k} x_1^{c_1}\ldots x_k^{c_k}$ forment une base de l'espace $QSym$, indexée par les compositions. Une nouvelle base est définie par la relation $F_D = \sum_{C\geq D} M_C$.

La théorie des P-partition permet de donner une interprétation aux fonctions F_C (cf. Stanley [Sta], Gessel [Ges]). Plus précisément, si w est un mot dont la composition associée est C, et si $P(w)$ désigne l'ordre linéaire correspondant au mot w, on obtient F_C comme la fonction génératrice des $P(w)$-partitions: $F_C = \Gamma(P(w))$. Dans [Ges1], Gessel démontre que l'application linéaire ω définie par $F_C \mapsto F_{C'}$ est un automorphisme de $QSym$, qui étend l'automorphisme ω des fonctions symétriques. Elle est, au signe près, l'antipode de l'algèbre $QSym$. On démontre aussi que $\omega(\Gamma(P)) = \Gamma(P^*)$, c'est-à-dire la fonction géneratrice de l'ensemble partiellement ordonné dual de P correspond à l'antipode. Nous donnons une expression explicite des fonctions symétriques f_λ, qui correspondent aux fonctions symétriques monomiales via l'automorphisme ω, en termes de celles-ci: notamment, le coefficients dans cette écriture auront tous le même signe; nous retrouvons ainsi un résultat de Doubilet [D]. Nous pouvons interpréter aussi le produit et le coproduit externe de $QSym$: la réunion disjointe de deux ordres partiels correspond au produit, et une certaine décomposition d'un ordre partiel en idéaux correspond au coproduit. Nous en déduisons ainsi une expression pour le produit et le coproduit des fonctions de la base des F_C, qui seraient autrement difficiles à trouver.

Dans le chapitre 5, on établit la dualité entre $QSym$ et l'espace Σ engendré par les classes des descentes du groupe symétrique. Dans [Sol], Solomon démontre que l'espace Σ est fermé par rapport au produit des permutations: Σ est donc une sous-algèbre de l'algèbre du groupe symétrique KS. Nous définissons sur KS un coproduit Δ et un nouveau produit, indiqué par $\star$: il est la restriction à KS du produit de convolution de l'algèbre de Hopf de concaténation $K\langle A\rangle$. Nous démontrons que KS, avec le produit $\star$ et le coproduit Δ, est une algèbre de Hopf, dont Σ est une sous-algèbre de Hopf[1] . Pour le montrer, nous utilisons un autre coproduit Δ' et produit $\star'$ (qui est la convolution de l'algèbre de Hopf du mélange), par rapport auxquels KS est une algèbre de Hopf. Le produit $\star$ et le coproduit Δ s'obtiendront du produit $\star'$ et du coproduit Δ' si on conjugue par l'automorphisme θ de KS qui associe à toute permutation son inverse. En s'appuyant à une identité fondamentale de Garsia et Remmel [GRem], qui relie une base de $\Sigma' = \theta(\Sigma)$ au produit du mélange, il est facile de voir que Σ' est fermé sur le produit $\star'$. Soit $D_C = \sum_{Des(\sigma)=C} \sigma \in \Sigma$, et F_C^* la base de $QSym^*$ duale de la base F_C de $QSym$. Alors l'application linéaire $F_C^* \mapsto D_C$ est un isomorphisme de l'algèbre de Hopf $QSym^*$, duale de $QSym$ avec le coproduit externe, dans l'algèbre de Hopf des descentes, et au même temps de la bigèbre $QSym^*$, duale de la bigèbre $QSym$ avec le coproduit interne, dans la bigèbre Σ des descentes (de Solomon). Pour montrer que le coproduit Δ est un morphisme pour la structure d'algèbre, un utilise le développement du produit des éléments de la base $D_{\leq C}$, décrit par Garsia-Remmel [GRem].

Il est bien connu que la fonction génératrice des partitions planaires de forme λ/μ est une fonction symétrique, notamment la fonction de Schur $s_{\lambda/\mu}$. Stanley conjecture que seuls les ensembles ordonnés dont la fonction géneratrice est symétrique,

[1] On utilise parfois le terme "algèbre des descentes" pour indiquer l'espace vectoriel Σ. Remarquons ici que pour éviter toute ambigüité, il faudrait plutôt parler de "bigèbres des descentes", car en effet il y a deux produits differents sur Σ.

proviennent des partitions planaires. On pourrait dire dans ce sens que les ensembles partiellement ordonnés sont aux fonctions quasi-symétriques ce que les tableaux de Young sont aux fonctions symétriques. Dans le chapitre 6, dans la tentative de résoudre la conjecture ci-dessus, nous avons plutôt montré le résultat suivant, qui a été conjecturé par Reutenauer: $L(P)$ est une réunion de classes plaxiques (cf. Lascoux-Schützenberger [LS]) si et seulement si l'ordre partiel P provient d'un tableau gauche. On montre ensuite que la conjecture de Stanley est équivalente à la conjecture suivante: si la fonction génératrice $\Gamma(P)$ est symétrique, alors $\Gamma(Q)$ est symétrique, pour tout sous-ensemble Q convexe dans P.

Dans le Chapitre 7, nous étendons aux graphes étiquetés une construction que Schützenberger avait défini d'abord sur les tableaux de Young, ensuite sur les ensembles partiellement ordonnés à étiquetage naturel: l'évacuation. Nous montrons de manière simple que l'évacuation est une involution, et que les traînées et les trajectoires de l' évacuation d'un graphe deviennent les trajectoires et les traînées de l 'évacuation inverse. L'outil principal sera un ensemble d' opérateurs r_i, introduit par Haiman [H], qui agissent sur le graphe étiqueté comme les transpositions adjacentes que si les entiers i et $i+1$ sont les étiquettes de sommets non-adjacents dans le graphe.

1 COMPOSITIONS ET PARTITIONS

Une *composition* est une suite finie d'entiers positifs. Si $C = (c_1, \ldots, c_k)$ est une composition, on appelle $|C| = \sum_{i=1}^{k} c_i$ le *poids* de C et $\ell(C) = k$ la *longueur* de C. Les entiers c_i sont les *parts* de C. Pour dire que C est une composition de n, (i.e. $|C| = n$), on écrit souvent $C \models n$. On écrit parfois $c_1 \ldots c_k$ au lieu de $(c_1, \ldots, c_k)$. L'*image miroir* de C est la composition $C^{\sim} = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_1)$ de n . Si $C = (c_1, \ldots, c_k)$ et $D = (d_1, \ldots, d_k)$ ont le même nombre de parts, on définit la *somme* de C et D par $C + D = (c_1 + d_1, \ldots, c_k + d_k)$.

Chaque nombre entier peut être considéré comme une composition de longueur 1. Si $C = (c_1, \ldots, c_k)$ et $D = (d_1, \ldots, d_h)$ sont deux compositions de n, on écrit $C \geq D$ si la composition C est *plus fine* que D. Ceci signifie qu'il existe une décomposition de l'intervalle $\{1, \ldots, k\}$ en h intervalles consécutifs $I_1, \ldots, I_h$ tels que $d_i = \sum_{j \in I_i} c_j$.

Exemple 1.1 Voici le diagramme de Hasse de l'ordre partiel sur les compositions de 4. La composition la plus fine est 1111.

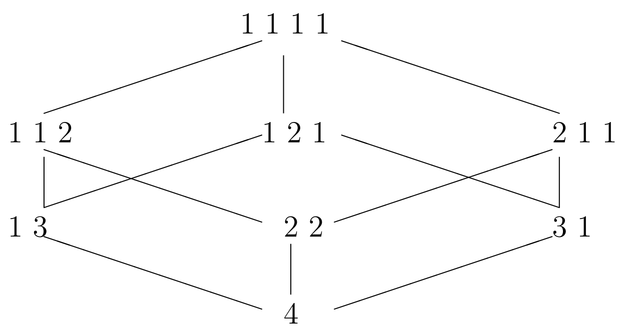


Figure 1.

On parlera aussi de *pseudo-composition* de n quand on a une suite finie d'entiers positifs ou nuls $H = (h_1, \ldots, h_k)$ dont le poids $|H| = \sum_{i=1}^{n} h_i$ est n, de longueur $\ell(H) = k$. Il est naturel d'associer à toute pseudo-composition H la composition $C(H)$ (de longueur $\ell((H)) \leq \ell(H)$) qu'on obtient en supprimant les zéros de H.

Une *partition* est un multi-ensemble d'entiers positifs. L'usage est d'identifier une partition λ avec la composition décroissante canoniquement associée à ce multi-ensemble, soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Il est parfois commode d'écrire la partition sous la forme $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots i^{m_i} \ldots)$, où l'entier $m_i = m_i(\lambda)$, dit la *multiplicité* de i, est le nombre d'occurrences de l'entier i dans λ. On parlera ainsi de longueur, de poids et de parts d'une partition, comme ci-dessus. Pour dire que λ est une partition de n, on écrit souvent $\lambda \vdash n$. Par $p(n)$ on designe le nombre de partitions de n. On adopte la convention: $\lambda_i = 0$ si $i > \ell(\lambda)$.

Si C est une composition, nous dénotons par $\lambda(C)$ l'unique partition qu'on obtient en réarrangeant les parts de C de façon décroissante.

Le *diagramme* (ou la *forme*) $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ est défini comme l'ensemble des points $(i, j) \in \mathbf{N}^2$ tels que $1 \leq i \leq \lambda_j$ pour $j = 1, \ldots, k$. Généralement on remplace les points par des cases. Par exemple, le diagramme de $\lambda = (3221)$ est donné dans la Figure 2.

Figure 2.

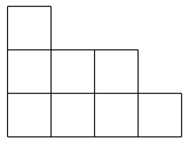


Figure 3.

Pratiquement, on construit le diagramme de λ en empilant du bas en haut successivement des bandes horizontales ayant λ_i cases.

La *partition conjuguée* d'une partition λest la partition λ' dont le diagramme s'obtient par transposition du diagramme de λ, i.e. par symétrie par rapport à la diagonale. Ainsi, si $\lambda = (3221)$, $\lambda' = (431)$, voir Figure 3.

On peut introduire différents ordres partiels sur l'ensemble des partitions.

- Pour deux partitions λ et μ on dira que $\lambda < \mu$ dans l'*ordre lexicographique* s'il existe un indice j tel que $\lambda_i = \mu_i$ pour $i < j$ et $\lambda_j < \mu_j$.
- Si $|\lambda| = |\mu|$ on dira que $\lambda \trianglelefteq \mu$ dans l'*ordre de dominance* si $\lambda_1 + \ldots + \lambda_i \leq \mu_1 + \ldots + \mu_i$ pour tout i.
- On écrira enfin $\lambda \supseteq \mu$ si le diagramme de λ contient celui de μ.Ceci peut aussi s'écrire: $\lambda_i \geq \mu_i$, pour tout i.

Soient λ, μ deux partitions telles que $\lambda \supseteq \mu$. On définit la *forme* (ou *diagramme*) *gauche* λ/μ comme étant l'ensemble des points de $\mathbf{N^2}$ qu'on obtient du diagramme de λ en enlevant les cases du diagramme de μ. Le *poids* de λ/μ est $|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu|$; son *conjugué* est la forme gauche λ'/μ'.

Un *tableau* T de forme λ est un remplissage $(i, j) \longmapsto T(i, j)$ du diagramme de λ par les lettres d'un alphabet X totalement ordonné (par exemple, un ensemble infini de variables), qui satisfait les conditions suivantes sur les étiquettes $T(i,j)$ du diagramme:

- $T(i,j) \leq T(i+1,j)$ (croissance de gauche à droite sur les lignes);
- $T(i,j) < T(i,j+1)$ (croissance stricte du bas en haut sur les colonnes).

Un *tableau* T est dit *multilinéaire* si chaque lettre dans T n'apparaît qu'une fois, et *standard* si de plus les premières $|\lambda|$ lettres de X y apparaissent, où λ est la forme de T. Si dans T il y a m_i occurrences de la lettre i, le poids $|T|$ du tableau est le monôme

$$|T| = \prod_{i \in X} i^{m_i}.$$

De la même façon on peut définir un tableau associé à une forme gauche λ/μ.

Un *chemin* dans λ/μ est une suite de cases dans la forme gauche telle que deux cases consécutives ont un côté en commun. On dit que λ/μ est *connexe* si on peut joindre deux quelconques de ses cases par un chemin . De manière équivalente, λ/μ est connexe si et seulement si la condition $\lambda_{i+1} - \mu_i \geq 1$ est vérifiée pour tout $i \leq \ell(\mu)$. On parlera ainsi de forme gauche connexe ou de ses composantes connexes.

Exemple 1.2 Le diagramme de $\lambda/\mu = 4221/2211$, qui a deux composantes connexes, est ombragé dans la Figure 4.

Un *ruban* est une forme gauche λ/μ telle que $\lambda_{i+1} - \mu_i = 1$ pour tout $1 \leq i < \ell(\lambda)$. A tout ruban λ/μ on peut associer la composition $C = (c_1, \ldots, c_k)$ définie par

$$\begin{cases} k = \ell(C) = \ell(\lambda) \\ c_{i+1} = \lambda_{k-i} - \mu_{k-i}, 0 \leq i \leq k-1. \end{cases}$$

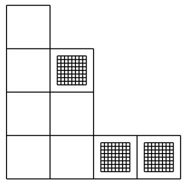


Figure 4.

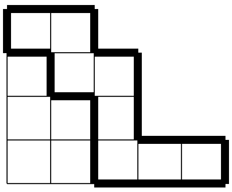


Figure 5.

Vice-versa, soit $C = (c_1, \ldots, c_k)$ une composition. Le ruban associé à C, dénoté par $\mathrm{rub}(C)$, est la forme gauche λ/μ, où les partitions λ et μ sont définies par les relations suivantes:

$$\begin{cases} \lambda_k = c_1 \\ \lambda_{i+1} - \mu_i = 1, 1 \leq i \leq k-1 \\ \lambda_i - \mu_i = c_{k-i+1}, 1 \leq i \leq k-1 \end{cases} .$$

Par exemple, pour $C = (2213)$ on obtient $\mathrm{rub}(C) = 5332/221$, voir Figure 5. Pratiquement, on construit $\mathrm{rub}(C)$ en collant successivement une bande horizontale à c_{i+1} cases en dessous de la dernière case d'une bande horizontale à c_i cases.

La *composition conjuguée* d'une composition C, dénotée C', est l'unique composition qui satisfait

$$\mathrm{rub}(C') = (\mathrm{rub}(C))'.$$

Dans la Figure 6 on a $(\mathrm{rub}(C))' = 44311/32$, et $C' = (11321)$.

Il est bien connu qu'il y a une bijection entre compositions de n et sous-ensembles

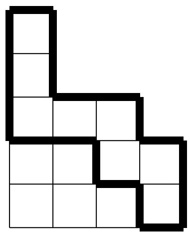


Figure 6.

de $\{1, \ldots, n-1\} = [n-1]$. Elle se définit de la manière suivante.

A la composition $C = (c_1, \ldots, c_k)$ de n on associe le sous-ensemble $Des(C) = \{d_1 < \ldots < d_{k-1}\}$ de $[n-1]$, appelé l'ensemble des *descentes* de C et donné par

$$d_i = d_{i-1} + c_i, 1 \leq i \leq k-1,$$

où on pose $d_0 = 0$, i.e. $d_i = c_1 + c_2 + \ldots + c_i$.

Dénotons par $\mathcal{C}$ la correspondance inverse de Des, qui au sous-ensemble $S = \{d_1 < \ldots < d_{k-1}\}$ de $[n-1]$ associe la composition $\mathcal{C}(S) = (c_1, \ldots, c_k)$ de n donnée par

$$c_i = d_i - d_{i-1}, 1 \leq i \leq k, \tag{1.1}$$

avec $d_0 = 0$ et $d_k = n$.

Remarque 1.3 Soient S, T des sous-ensembles de $[n-1]$: on a $S \subseteq T$ si et seulement si $\mathcal{C}(S) \leq \mathcal{C}(T)$.

Remarque 1.4 On peut étiqueter le ruban associé à une composition C de n avec les entiers de 1 à n en partant du haut. On obtient alors $Des(C)$ directement en lisant les étiquettes des cases les plus à droite sur chaque ligne de rub(C), sauf la dernière . Par exemple, pour $C = (2213)$ on a $Des(C) = \{2, 4, 5\}$ et $Des(C)$ apparaît vraiment comme les nombres suivis d'une descente lors de cette lecture (voir Figure 7).

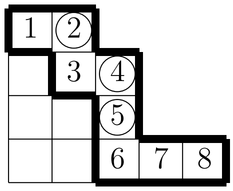


Figure 7.

Remarque 1.5 Pour $C = (c_1, \ldots, c_k) \models n$ on a

$$Des(C^{\sim}) = \{n - i |\ i \in Des(C)\} : \tag{1.2}$$

en effet

$$\begin{aligned} Des(C^{\sim}) &= \{c_k, c_k + c_{k-1}, \ldots, c_k + \ldots + c_2\} \\ &= \{n - (c_1 + \ldots + c_{k-1}), n - (c_1 + \ldots + c_{k-2}), \ldots, n - c_1\} \\ &= \{n - d_{k-1}, n - d_{k-2}, \ldots, -d_1\}. \end{aligned}$$

Etant données deux compositions $E = (e_1, \ldots, e_k)$ et $F = (f_1, \ldots, f_h)$, il y a deux façons de les "coller". L'une consiste à coller rub(F) en dessous derub(E) de sorte que le résultat reste un ruban: plus précisement, on considère la nouvelle composition EF obtenue par concaténation de E et F:

$$EF = (e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_h).$$

L'autre consiste à coller rub(F) à côté de rub(E): il s'agit de l'opération suivante, qu'on appellera la *fusion* de E et F:

$$E \circ F = (e_1, \ldots, e_{k-1}, e_k + f_1, f_2, \ldots, f_h).$$

Par exemple, pour $E = (21)$ et $F = (32)$ voir Figure 8. On a $|EF| = |E \circ F| = |E| + |F|$, $\ell(EF) = \ell(E) + \ell(F)$ et $\ell(E \circ F) = \ell(E) + \ell(F) - 1$. Il est clair que

$$(EF)^{\sim} = F^{\sim}E^{\sim}. \tag{1.3}$$

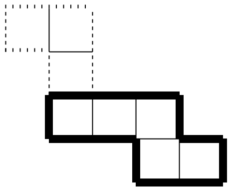
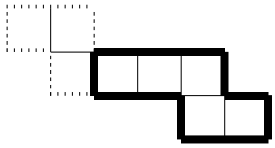
$EF = (2132)$  $E \circ F = (242)$ 

Figure 8.

Remarque 1.6 Si la composition $E = (c)$ n'a qu'une part, l'ensemble $Des(c \circ F)$ est obtenu à partir de $Des(F)$ par addition de c:

$$Des(c \circ F) = \{c + d | d \in Des(F)\} \subseteq [n-1] \setminus [c].$$

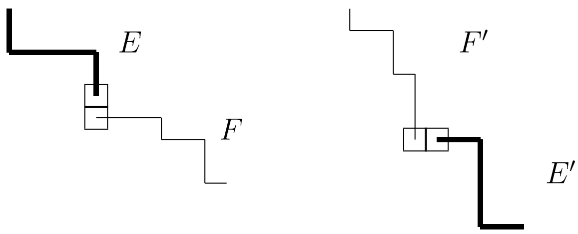
Pour s'en convaincre, voir la Remarque 1.4.

Lemme 1.7 *On a* $|E| \in Des(EF)$ *et* $Des(E \circ F) = Des(EF) \setminus |E| = Des(E) \cup Des(|E| \circ F)$*; donc* EF *couvre* $E \circ F$ *dans l'ordre partiel du raffinement des compositions, i.e.* $E \circ F \leq EF$ *et il n'y a pas de composition intermédiaire.*

Dém. Clair, si on considère la Remarque 1.4.□

Lemme 1.8 $(EF)' = F' \circ E'$.

Dém. Clair d'après la définition de C' et son interprétation graphique.□



Proposition 1.9 *Les ensembles* $Des(C^{\sim})$ *et* $Des(C')$ *forment une partition de l'ensemble* $[n-1]$*, si* C *est une composition de* n*.*

Dém. On montre par récurrence sur $\ell(C)$ que

$$Des(C^{\sim}) \cup Des(C') = [n-1], \tag{1.4}$$

et

$$Des(C^{\sim}) \cap Des(C') = \emptyset. \tag{1.5}$$

Si $\ell(C) = 1$, i.e. $C = (n)$, on a $C^{\sim} = (n)$, $C' = (1^n)$, donc $Des(C^{\sim}) = \emptyset$, $Des(C') = [n-1]$, et (1.4), (1.5) sont vraies. Si $\ell(C) > 1$ on peut écrire $C = EF$, avec $1 \leq \ell(E), \ell(F) < \ell(C)$, et on a par le Lemme (1.8) et la relation (1.3) $C' = F' \circ E'$ et $(C^{\sim}) = (F^{\sim}E^{\sim})$. Soit $|E| = e$, $|F| = f$, avec $e + f = n$. Alors:

$$\begin{array}{ll}
 & Des(C^{\sim}) \cup Des(C') \\
 & = Des(F^{\sim}E^{\sim}) \cup Des(F' \circ E') \\
\text{(Lemme 1.7)} & = (Des(F^{\sim}) \cup Des(|F^{\sim}| \circ E^{\sim}) \cup \{|F^{\sim}|\}) \\
 & \quad \cup (Des(F') \cup Des(|F'| \circ E')) \\
\text{(récurrence sur } F) & = [f-1] \cup \{f\} \cup Des(f \circ E^{\sim}) \cup Des(f \circ E') \\
\text{(Rémarque 1.6)} & = [f] \cup \{f + d | d \in Des(E^{\sim}) \cup Des(E')\} \\
\text{(récurrence sur } E) & = [f] \cup \{f+1, \ldots, f+l-1\} \\
 & = [n-1].
\end{array}$$

On a $Des(F^{\sim})$, $Des(F') \subseteq [f-1]$ et pour la Remarque 1.6 , $Des(f \circ E^{\sim})$, $Des(f \circ E') \subseteq \{f+1, \ldots, n-1\}$: par conséquence

$$\begin{aligned}
& Des(C^{\sim}) \cap Des(C') \qquad (1.6) \\
= \;& (Des(F^{\sim}) \cup Des(f \circ E^{\sim}) \cup \{f\}) \cap (Des(F') \cup Des(f \circ E')) \\
= \;& (Des(F^{\sim}) \cap Des(F')) \cup \{f + d| \; d \in Des(E^{\sim}) \cap Des(E')\} = \emptyset,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité suit par récurrence sur E et F. $\square$

Corollaire 1.10 $Des(C'^{\sim}) = Des(C^{\sim\prime}) = [n-1] \setminus Des(C)$.

Dém. Ceci découle de (1.4), car l'image miroir et la conjugaison sont des involutions.□

2 ALGÉBRES DE HOPF

2.1 Définitions

Dans cette section on donne les définitions et les propriétés fondamentales des cogèbres, bigèbres et algèbres de Hopf. Pour une présentation plus détaillée, voir Abe [A], ou Sweedler [Swe].

Soit K un corps commutatif. Un espace vectoriel A sur K est une K-*algèbre* s'il est muni de deux applications linéaires

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A \quad \text{(le produit)}$$

et

$$\eta : K \longrightarrow A \quad \text{(l'unité)}$$

telles que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "\mu\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\mu"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] & \\ A\otimes K \arrow[ur, "1\otimes\eta"] & A \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] & K\otimes A \arrow[ul, "\eta\otimes 1"'] \end{tikzcd}$$

Le premier diagramme nous dit que le produit est associatif, le second que $\eta(1)$ est l'élément unité pour le produit dans l'algèbre A.

Une algèbre A est *graduée* s'il existe une decomposition de A en somme directe de sous-espaces $A = \oplus_{i\geq 0} A_i$ telle que $\mu(A_i \otimes A_j) \subseteq A_{i+j}$ et $\eta(K) \subseteq A_0$.
Soit $\tau : A\otimes A \longrightarrow A\otimes A$ l'application linéaire *échange* donnée par $\tau(x\otimes y) = y\otimes x$. A est une algèbre *commutative* si on a $\mu = \mu\circ\tau$.

Dualement, une K-*cogèbre* est un espace vectoriel C sur K muni de deux applications linéaires

$$\Delta : C \longrightarrow C \otimes C \quad \text{(le coproduit)}$$

et

$$\epsilon : C \longrightarrow K \quad \text{(la co-unité)}$$

telles que les diagrammes suivantes commutent:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "1 \otimes \Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes 1"] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\simeq"] & \\
C \otimes K & C \otimes C \arrow[l, "1 \otimes \epsilon"'] \arrow[r, "\epsilon \otimes 1"] & K \otimes C
\end{tikzcd}$$

Les propriétés indiquées dans les diagrammes sont la coassociativité du coproduit et la counitarité, et elles se traduisent par les relations

$$(1 \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes 1) \circ \Delta \tag{2.1}$$

et

$$(1 \otimes \epsilon) \circ \Delta(c) = c \otimes 1 \tag{2.2}$$

$$(\epsilon \otimes 1) \circ \Delta(c) = 1 \otimes c \tag{2.3}$$

respectivement.

Une cogèbre C est *graduée* s'il existe une decomposition $C = \oplus_{i \geq 0} C_i$ telle que $\Delta(C) \subseteq \oplus_k (C_k \otimes C_{n-k})$ et $\epsilon(C_n) = 0$ si $n \geq 1$.
On dit que C est une cogèbre *cocommutative* si $\tau \circ \Delta = \Delta$.

Soient (A, μ_A, η_A) et (B, μ_B, η_B) deux K-algèbres. Une application linéaire $\phi : A \longrightarrow B$ est un *morphisme d'algèbres* si et seulement si $\phi \circ \mu_A = \mu_B \circ (\phi \otimes \phi)$ et

$\phi \circ \eta_A = \eta_B$.
Pour des cogèbres $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$, l'application linéaire $\psi : C \longrightarrow D$ est un *morphisme de cogèbres* si et seulement si $(\psi \otimes \psi) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ \psi$ et $\epsilon_D \circ \psi = \epsilon_C$.

Si A et B sont deux algèbres (resp. cogèbres), on étend à $A \otimes B$ la structure d'algèbre (resp. cogèbre) de façon naturelle: $\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1)$ et $\eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B$ (resp. $\Delta_{A\otimes B} = (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_B)$ et $\epsilon_{A\otimes B} = \epsilon_A \otimes \epsilon_B$). Une K-algèbre qui est au même temps une K-cogèbre est une *bigèbre* si les deux structures sont compatibles, dans le sens que Δ et ϵ sont des morphismes d'algèbres. Explicitement, ceci veut dire que $\epsilon(\eta(1)) = 1$, $\epsilon(gh) = \epsilon(g)\epsilon(h)$, et $\Delta(\eta(1)) = \eta(1) \otimes \eta(1)$, $\Delta(gh) = \sum g_i h_j \otimes g'_i h'_j$ si $\Delta(g) = \sum g_i \otimes g'_i$ et $\Delta(h) = \sum h_j \otimes h'_j$.
On peut montrer que Δ et ϵ sont des morphismes d'algèbres si et seulement si μ et η sont des morphismes de cogèbres ([A], Th.2.1.1).

Un *morphisme de bigèbres* A et B est une application linéaire $\phi : A \longrightarrow B$ qui soit au même temps un morphisme pour les structures d'algèbre et de bigèbre. Un exemple: si A est une bigèbre, l'application d'échange τ est un morphisme pour la bigèbre $A \otimes A$.

Un élément c d'une bigèbre est dit *"group-like"* si $\Delta(c) = c \otimes c$; il s'appelle *primitif* si $\Delta(c) = c \otimes 1 + 1 \otimes c$ et de plus $\epsilon(c) = 1$

Soit (A, μ_A, η_A) une algèbre, $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ une cogèbre, $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ deux applications linéaires. La *convolution* $\star$ de f et g est l'application linéaire $C \longrightarrow A$ définie par

$$f \star g = \mu_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C. \tag{2.4}$$

$\mathrm{Hom}(C, A)$ devient ainsi une K-algèbre quand on prend comme produit la convolution, et comme unité $\eta(\alpha) = \alpha\eta_A \circ \epsilon_C$.

Une bigèbre A est une *algèbre de Hopf* s'il existe une application linéaire $S \in$

End(A) telle que

$$S \star 1 = 1 \star S = \eta \circ \epsilon, \tag{2.5}$$

i.e.

$$\mu \circ (S \otimes 1) \circ \Delta = \mu \circ (1 \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon. \tag{2.6}$$

Un tel S s'appelle l'*antipode* de A. On montre que S est un anti-homomorphisme d'algèbres et de cogèbres; si de plus l' algèbre A est commutative, S est une involution ([A] Th. 2.1.4).

Etant données des algèbres de Hopf A et B d'antipodes S_A et S_B respectivement, $\phi : A \longrightarrow B$ est un *morphisme d'algèbres de Hopf* si ϕ est un morphisme de bigèbres et de plus $\phi \circ S_A = S_B \circ \phi$.

En partant d'une cogèbre (C, Δ, ϵ) on construit l'*algèbre duale* de C comme il suit: soit

$$\pi : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^t} C^* \tag{2.7}$$

la composition de l'application naturelle ρ avec la transposée de la comultiplication Δ, et

$$u : K \simeq K^* \xrightarrow{\epsilon^t} C^*. \tag{2.8}$$

Plus explicitement, pour $f, g \in C^*$ le produit $\pi(f \otimes g)$ sera la convolution $f \star g$ et $u(1) = \epsilon$.

Si $C = \oplus_{i \geq 0} C_i$ est une cogèbre graduée, le dual gradué $C^{*gr} = \oplus_{i \geq 0} C_i^*$ est une algèbre graduée, sous- algèbre de l'algèbre C^* duale de C.

Remarque 2.1 On ne peut définir analoguement la cogèbre duale d'une algèbre donnée A que si A est de dimension finie, car seulement dans ce cas $\rho : A^* \otimes A^* \longrightarrow (A \otimes A)^*$ est une bijection.

Par contre, si $(A = \oplus_{i\geq 0} A_i, \mu, \eta)$ est une *algèbre graduée localement finie* (i.e. dont les composantes homogènes sont tous de dimension finie), alors $A_i^* \otimes A_j^* \simeq (A_i \otimes A_j)^*$ pour tout i, j, et le *dual gradué* $A^{*gr} = \oplus_{i\geq 0} A_i^*$ est une cogèbre: le coproduit Δ est le transposé du produit $\mu^t : A_n^* \longrightarrow (\oplus_i A_i \otimes A_{n-i})^* \simeq \oplus_i A_i^* \otimes A_{n-i}^*$ et la co-unité $\epsilon : A_0^* \longrightarrow K$ est définie par $\epsilon(f) = f(\eta(1))$.
En particulier un tel espace A est une bigèbre graduée de type fini $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ si et seulement si $(A^*, \mu^*, \eta^*, \Delta^*, \epsilon^*)$ l'est aussi (voir Milnor-Moore Proposition 4.8 dans [MM]).

On dira que une bigèbre graduée $A = \oplus_{i\geq 0} A_i$ est *connexe* si $\epsilon : A_0 \longrightarrow K$ et $\eta : K \longrightarrow A_0$ sont des isomorphismes. Notamment, on obtient $\eta \circ \epsilon = id|_K$.

Proposition 2.2 (Milnor-Moore, [MM], §4) *Toute bigèbre graduée connexe de type fini est une algèbre de Hopf.*

Dém. Grâce à la graduation, il devient possible de définir l'antipode, disons $S : A \longrightarrow A$, par récurrence, sur chaque composante A_n, en utilisant la relation (2.6). Comme A est connexe (i.e. $A_0 = K$), nécessairement S est l'identité sur A_0:

$$1 = \eta \circ \epsilon(1) = \mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta(1) = S(1) \cdot 1 = S(1).$$

Si l'on connait S sur A_i pour tout $0 \leq i \leq n$, on peur définir S sur A_{n+1}. En effet on a $\Delta(A_{n+1}) \subseteq \sum_{i+j=n+1} A_i \otimes A_j$; donc pour $x \in A_{n+1}$, soit $\Delta(x) = \sum_{i+j=n+1} \sum x_i' \otimes x_j''$, où $x_i', x_i'' \in A_i$. Puisque $A_0 \otimes A_{n+1} \simeq A_{n+1}$, on peut écrire

$$\Delta(x) = y \otimes \alpha + \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i\leq n}} \sum x_i' \otimes x_j'',$$

pour quelque $\alpha \in K$, $y \in A_{n+1}$. Or, il ne faut pas oublier que $(1 \otimes \epsilon) \circ \Delta(x) = x \otimes 1$ (c'est la relation (2.2)), alors

$$y \otimes \alpha = y \otimes \epsilon(\alpha) = (1 \otimes \epsilon) \circ \Delta(x) = x \otimes 1,$$

donc de $\mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta(x) = \eta \circ \epsilon(x) = 0$, on déduit

$$S(x) = S(x) \cdot 1 = - \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i \leq n}} \sum S(x'_i) \cdot x''_j. \ \square$$

Remarque 2.3 Dans ce travail, les espaces vectoriels considérés seront tous gradués de la forme $V = \oplus_{i \geq 0} V_i$, avec les sous-espaces V_i de dimension finie. Ainsi, pour simplifier les notations dans la suite, nous appellerons *dual* de V le dual gradué et le dénoterons V^* plutôt que V^{*gr}.

2.2 L'algèbre de concaténation et du mélange

On donne ici deux exemples d'algèbres de Hopf , qui ont la propriété d'être duales l'une de l'autre, et qui nous serviront plus loin.

Soit A un ensemble infini de variables non commutatives, K un corps commutatif, $A^\star$ l'ensemble des *mots* dans A, $K\langle A \rangle$ l'espace des polynômes non commutatif. Si $P \in K\langle A \rangle$, on écrira

$$P = \sum_{w \in A^\star} \langle P, w \rangle w,$$

où $\langle P, w \rangle$ exprime donc le coefficient du mot w dans P. En d'autres termes

$$\langle \ , \ \rangle : K\langle A \rangle \otimes K\langle A \rangle \longrightarrow K$$

est le seul produit scalaire sur $K\langle A \rangle$ pour lequel $A^\star$ forme une base orthonormale. Si $w = w_1 \dots w_n$, $w_i \in A$, on dénote par $|w| = n$ la *longueur du mot* w, et par A^n l' ensemble des mots de longueur n. Le *degré* d'un polynôme $P \neq 0$ est

$$\deg(P) = \sup\{|w|, w \in A^\star, \langle P, w \rangle \neq 0\},$$

et $\deg(0) = -\infty$. Un polynôme $P \in K\langle A \rangle$ est *homogène de degré* n s'il est combinaison linéaire de mots de longueur n: l'espace $K\langle A \rangle = \oplus_{i \geq 0} K\langle A^n \rangle$ est donc gradué.

Le produit de *concaténation*

$$\mathrm{conc} : K\langle A\rangle \otimes K\langle A\rangle \longrightarrow K\langle A\rangle$$

s'obtient par extension de la concaténation uv de deux mots $u, v \in A^\star$: si $P, Q \in K\langle A\rangle$, on a

$$\langle PQ, w\rangle = \sum_{\substack{u,v\in A^\star \\ uv=w}} \langle P, u\rangle\langle Q, v\rangle.$$

Avec l'injection $u : K \hookrightarrow K\langle A\rangle$ comme unité, $K\langle A\rangle$ devient une algèbre associative, librement engendrée par A et graduée, car $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

On définit sur A les suivants homomorphismes d'algèbre:

$$\delta : K\langle A\rangle \longrightarrow K\langle A\rangle \otimes K\langle A\rangle$$

$$\delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a,$$

$$\epsilon : K\langle A\rangle \longrightarrow K : \epsilon(a) = 0.$$

Si $w = w_1 \dots w_n \in A^\star$, on dénotera par $w^\sim = w_n \dots w_1$ son *image miroir*. Le résultat suivant est bien connu (voir [Reu], Proposition 1.10, et [A]):

Proposition 2.4 *Avec l'antipode*

$$\alpha : K\langle A\rangle \longrightarrow K\langle A\rangle : \alpha(w) = (-1^{|w|})w^\sim,$$

$(K\langle A\rangle, \delta, \epsilon, \mathrm{conc}, u)$ *devient une algèbre de Hopf, qu'on appellera* algèbre de Hopf de concaténation.

On remarquera que α est entiérement défini par la propriété suivante: α est l'unique anti-automorphisme de $K\langle A\rangle$ tel que

$$\alpha(a) = -a \text{ pour tout } a \in A. \tag{2.9}$$

Un nouveau produit sur $K\langle A\rangle$, le *mélange* ou *shuffle*, denoté par $\sqcup\!\sqcup$ est défini comme suit.

Soit $w = w_1 \dots w_n \in A^\star$, et indiquons par $w|_I = w_{i_1} \dots w_{i_r}$ le *sous-mot* de w qui correspond au choix d'indices $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subseteq [n]$. Soit $u = u_1 \dots u_k$, $v = v_1 \dots v_l \in A^\star$: alors

$$u \sqcup\!\sqcup v = \sum w(I, J),$$

où la somme est sur les partitions $I \cup J = [k + l]$, $I \cap J = \emptyset$ et le mot $w(I, J)$ est défini par $w|_I = u$ et $w|_J = v$. En particulier on obtient $\deg(u \sqcup\!\sqcup v) = k + l$. Parfois le produit mélange est défini par récurrence: $w \sqcup\!\sqcup 1 = 1 \sqcup\!\sqcup w = w$, et pour $a, b \in A$, $u, v \in A^\star$

$$au \sqcup\!\sqcup bv = a(u \sqcup\!\sqcup bv) + b(au \sqcup\!\sqcup v), \tag{2.10}$$

ou, de façon équivalente

$$ua \sqcup\!\sqcup vb = (u \sqcup\!\sqcup vb)a + (ua \sqcup\!\sqcup v)b.$$

Avec le produit

$$sh : K\langle A\rangle \otimes K\langle A\rangle \longrightarrow K\langle A\rangle : sh(P \otimes Q) = P \sqcup\!\sqcup Q$$

qu'on obtient quand on étend le mélange par linéarité à tout $K\langle A\rangle$, et l'unité u, $K\langle A\rangle$ est une algèbre graduée associative et clairement commutative, car, comme l'on voit sur la définition, le mélange ne dépend pas de l'ordre des facteurs. Avec ces notations, calculons le coproduit δ sur un mot $w = a_1 \dots a_n$:

$$\begin{aligned}
\delta(w) &= \delta(a_1) \dots \delta(a_n) \\
&= (a_1 \otimes 1 + 1 \otimes a_1) \dots (a_n \otimes 1 + 1 \otimes a_n) \\
&= \sum_{\substack{I \cup J = [n] \\ I \cap J = \emptyset}} w|_I \otimes w|_J = \sum_{u, v \in A^\star} \langle w, u \sqcup\!\sqcup v\rangle u \otimes v
\end{aligned}$$

Il en suit que le coproduit δ est l'adjoint du produit mélange:

$$\langle \delta(w), u \otimes v \rangle = \langle w, u ⧢ v \rangle. \tag{2.11}$$

Soit δ' le coproduit sur $K\langle A \rangle$ qu'on obtient comme l'adjoint du produit de concaténation, c'est-à-dire:

$$\delta'(w) = \sum_{u,v \in A^\star} \langle w, uv \rangle u \otimes v. \tag{2.12}$$

Le coproduit δ' est un homomorphisme de l'algèbre $K\langle A \rangle$ avec le produit mélange (voir [Reu], Proposition 1.9):

$$\delta'(u ⧢ v) = \delta'(u) ⧢ \delta'(v).$$

Proposition 2.5 $(K\langle A \rangle, \delta', \epsilon, sh, u)$ *est une algèbre de Hopf, dite* algèbre de Hopf du mélange *, si on prend α comme antipode. De plus, via l'identification de $K\langle A \rangle$ avec son dual gradué $K\langle A \rangle^*$ à l'aide du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, le dual de l'algèbre de concaténation est l'algèbre du mélange.*

Dém. La co-unité ϵ est un morphisme pour le mélange, car ce produit respecte la graduation:

$$sh(K\langle A^n \rangle \otimes K\langle A^m \rangle) \subseteq K\langle A^{n+m} \rangle.$$

L'application α aussi est un morphisme pour le mélange: soient $u, v \in A^\star$, $|u| = p$, $|v| = q$, alors

$$\begin{aligned} \alpha(u ⧢ v) &= \sum_{\substack{w|_I = u \\ w|_J = v}} \alpha(w(I,J)) = (-1)^{p+q} \sum_{\substack{w|_I = u \\ w|_J = v}} w^\sim(I,J) \\ &= (-1)^{p+q} \sum_{\substack{w|_G = u^\sim \\ w|_H = v^\sim}} w(G,H) \\ &= (-1)^p u^\sim ⧢ (-1)^q v^\sim = \alpha(u) ⧢ \alpha(v). \end{aligned}$$

(Il faut noter que si α est un anti-homomorphisme pour la concaténation, il est un morphisme pour le mélange, ce dernier étant commutatif.)

Observons que le coproduit δ coincide avec δ' sur A, i.e. les lettres sont des éléments primitifs pour les deux coproduits. Pour montrer que $K\langle A\rangle$ est une algèbre de Hopf par rapport au produit mélange, il suffit de vérifier les relations (2.1), (2.2), (2.3), et (2.5) pour tout mot $w \in A^\star$. Pour la coassociativité du coproduit δ' on a:

$$\begin{aligned}(\delta' \otimes 1) \circ \delta'(w) &= (\delta' \otimes 1)(\sum_{uv=w} u \otimes v) \\ &= \sum_{stv=w} (s \otimes t) \otimes v \\ &= \sum_{sr=w} s \otimes \delta'(r) \\ &= (1 \otimes \delta') \sum_{sr=w} s \otimes r = (1 \otimes \delta') \circ \delta'(w)\end{aligned}$$

Ensuite, puisque $\epsilon(u) = 0$ si $u \neq 1$, on trouve

$$(\epsilon \otimes 1) \circ \delta'(w) = \sum_{uv=w} \epsilon(u) \otimes v = 1 \otimes w,$$

et de la même manière $(1 \otimes \epsilon) \circ \delta'(w) = w \otimes 1$.

Enfin on veut montrer que α est bien l'antipode, i.e. que

$$sh \circ (id \otimes \alpha) \circ \delta'(w) = u \circ \epsilon(w), \tag{2.13}$$

ce qu'on va faire par récurrence sur la longueur de w. Si $w = 1$, $u \circ \epsilon(1) = 1$ et $sh \circ (id \otimes \alpha) \circ \delta'(1) = 1 \sqcup\!\sqcup \alpha(1) = 1$. Encore, si $w = a \in A$, on a $u \circ \epsilon(a) = 0$ et $sh \circ (id \otimes \alpha) \circ \delta'(a) = a \sqcup\!\sqcup \alpha(1) + 1 \sqcup\!\sqcup \alpha(a) = a - a = 0$. Soit $w = w_1 \dots w_n$, $n \geq 2$. Alors $u \circ \epsilon(w) = 0$ et si on pose $w_0 = w_{n+1} = 1$ on se ramène à montrer que

$$\begin{aligned}sh \circ (id \otimes \alpha) \circ \delta'(w) &= sh \circ (id \otimes \alpha)(\sum_{uv=w} u \otimes v) \\ &= sh \left(\sum_{i=0}^{n} w_1 \dots w_i \otimes \alpha(w_{i+1} \dots w_n) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} w_1 \dots w_i \sqcup\!\sqcup w_n \dots w_{i+1} = 0\end{aligned}$$

Si on applique au dernier membre de l'égalité la récurrence (2.10) sur le mélange, on a:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}w_1\dots w_i \sqcup\!\sqcup\, w_n\dots w_{i+1} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}w_1(w_2\dots w_i \sqcup\!\sqcup\, w_n\dots w_{i+1})$$
$$= (-1)^{n-i}(\sum_{i=1}^{n} w_1(w_2\dots w_i \sqcup\!\sqcup\, w_n\dots w_{i+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} w_n(w_1\dots w_i \sqcup\!\sqcup\, w_{n-1}\dots w_{i+1}))$$
$$= w_1\left(\sum_{uv=w_2\dots w_n} u \sqcup\!\sqcup\, \alpha(v)\right) - w_n\left(\sum_{uv=w_1\dots w_{n-1}} u \sqcup\!\sqcup\, \alpha(v)\right)$$
$$= w_1(sh\circ(id\otimes\alpha)\delta'(w_2\dots w_n) - w_n(sh\circ(id\otimes\alpha)\delta'(w_1\dots w_{n-1})) = 0,$$

où pour la dernière égalité on a utilisé (2.13), vraie pour $\ell(w) < n$.
Soient η' et ϵ' l'unité et la co-unité duales de ϵ et η; par définition (voir (2.8)) on a pour tout $v \in A^\star$:

$$\eta'(1)(v) = \langle\epsilon(1), v\rangle = \langle v, 1\rangle = \eta(1)(v),$$

$$\epsilon'(v) = \langle\eta(1), v\rangle = \langle 1, v\rangle = \epsilon(v).$$

Ceci, avec les relations (2.11) et (2.12) impliquent la dualité. □

Si A est totalement ordonné, l'*ordre alphabétique* sur $A^\star$ est défini par

$$u < v \Longleftrightarrow v = ux, x\in A^\star, \text{ou bien } u = xau',\ v = xbv',\quad a,\ b\in A.$$

On dira que $w \in A^\star$ est un *mot de Lyndon* si w est plus petit que tout son facteur droit, i.e. si pour toute factorisation non triviale $w = uv$, on a $w < v$. Il est bien connu que tout mot admet une factorisation décroissante unique en mots de Lyndon. De plus, on a le résultat suivant, du à Radford,[Rad] (voir aussi [Reu], Théorème 6.1):

Proposition 2.6 *L'algèbre du mélange $K\langle A\rangle$ est une algèbre commutative libre, engendrée par les mots de Lyndon.*

3 FONCTIONS SYMÉTRIQUES

3.1 Définitions

Dans ce rappel sur les fonctions symétriques nous avons suivi Macdonald [Mcd].

Soit K un anneau contenant $\mathbf{Q}$, X un ensemble dénombrable de variable; il sera commode d'avoir parfois un ordre total sur X. Par $K[[X]]$ on dénote l'algèbre des *série formelle* sur X à coefficients dans K. Une *série formelle* $f = f(x) \in K[[X]]$ est *symétrique* si pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{N^m}$, $x_i, y_j \in X$, le coefficient de $x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$ dans f est égal au coefficient de $y_1^{\alpha_1} \ldots y_m^{\alpha_m}$.

Une *fonction symétrique* est une série formelle symétrique de degré borné. Dénotons par Sym l'ensemble des fonctions symétriques, par Sym_n l'ensemble des fonctions symétriques homogènes de degré n. Il est clair que Sym et Sym_n sont sous-modules de $K[[X]]$. On verra plus loin que Sym a aussi une structure d'algèbre.

Nous noterons $\overline{Sym}$ l'ensemble des séries formelles symétriques. $\overline{Sym}$ est la complétion de Sym pour une topologie convenable. Il est facile de voir que $\overline{Sym}$ est l'ensemble des séries formelles laissées fixes sous l'action du groupe symétriques de X. On en déduit que $\overline{Sym}$ est une sous-algèbre de $K[[X]]$, et que Sym est une sous-algèbre de $\overline{Sym}$. Si besoin est, nous utiliserons la notation Sym_K, $\overline{Sym}_K$ pour préciser l'anneau des coefficients.

Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n > 0$, les *fonctions symétriques monomiales* m_λ sont définies par

$$\begin{aligned} m_\lambda &= \sum_{\substack{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_k) \\ \lambda(\beta)=\lambda}} \sum_{x_1<\ldots<x_k} x_1^{\beta_1} \ldots x_k^{\beta_k}, \qquad (3.1) \\ m_0 &= 1. \end{aligned}$$

Par exemple, $m_{211} = \sum_{x<y<z} (x^2yz + xy^2z + xyz^2)$.
Le coefficient de $x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}$ dans m_λ est 1 si $\lambda(\alpha) = \lambda$, 0 sinon. Donc $m_\lambda \in Sym_n$; de plus, l'ensemble $\{m_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ forme une base pour Sym_n: on a $dim_K Sym_n = p(n)$.

Nous avons besoin d'autres fonctions symétriques spéciales. Pour tout entier $r \geq 0$, soit

$$e_r = \sum_{x_1 < \ldots < x_r} x_1 \ldots x_r = m_{(1^r)}$$

la r *-ième fonction symétrique élémentaire*,

$$h_r = \sum_{x_1 \leq \ldots \leq x_r} x_1 \ldots x_r = \sum_{\lambda \vdash r} m_\lambda$$

la r *-ième fonction symétrique complète* (ou *homogène*) et, pour $r \geq 1$,

$$p_r = \sum_{x \in X} x^r = m_{(r)}$$

la r *-ième somme de puissances.* On a $e_0 = h_0 = 1$ et $e_1 = h_1$.

Pour une partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, on définit:

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \ldots e_{\lambda_k},$$
$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \ldots h_{\lambda_k},$$
$$p_\lambda = p_{\lambda_1} \ldots p_{\lambda_k}.$$

Théorème 3.1 ([Mcd], (2.3))

$$e_\lambda = m_{\lambda'} + \sum_{\mu \leq \lambda'} \alpha_{\lambda\mu} m_\mu, \tag{3.2}$$

où les nombres $\alpha_{\lambda\mu}$ *sont des entiers positifs.*

Le Théorème 3.1 nous dit encore une fois que les fonctions e_λ sont symétriques (voir [Mcd], (2.3)) ; de plus les relations entre les e_λ et les m_λ étant triangulaires, l'ensemble $\{e_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ forme une base de Sym_n.Si on considère que pour μ, ν partitions on a $e_\mu e_\nu = e_{\lambda(\mu\nu)}$, on voit encore une fois que Sym est une algèbre commutative graduée, librement engendrée par les fonctions symétriques élémentaires, i.e.

$$Sym = K[e_1, e_2, \ldots].$$

Soit λ une partition de n. La *fonction de Schur* s_λ associée à λ est la somme de tous les monômes de tableaux de forme λ:

$$s_\lambda = \sum_{T \text{de forme} \lambda} |T|, \tag{3.3}$$

où le remplissage des tableaux est fait avec les variables de X. Il est bien connu que les fonctions de Schur sont symétriques et que l'ensemble $\{s_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ forme une autre base pour Sym_n (voir [Mcd], (3.2)).

Soient

$$E(t) = \textstyle\sum_{r \geq 0} e_r t^r$$
$$H(t) = \textstyle\sum_{r \geq 0} h_r t^r$$
$$P(t) = \textstyle\sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1}$$

les séries génératrices des fonctions symétriques élémentaires, homogènes et sommes de puissances respectivement. On peut montrer que

$$E(t) = \prod_{x \in X} (1 + xt) \tag{3.4}$$

$$H(t) = \prod_{x \in X} (1 - xt)^{-1} \tag{3.5}$$

$$P(t) = H'(t)/H(t). \tag{3.6}$$

Il suit de (3.4) et (3.5) que

$$H(t)E(-t) = 1, \tag{3.7}$$

identité qu'on peut récrire sous la forme

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0, n \geq 1. \tag{3.8}$$

Soit $\omega : Sym \to Sym$ l'homomorphisme d'algèbres graduées défini par $\omega(e_r) = h_r, r \geq 0$. On a donc $\omega(e_\lambda) = h_\lambda$.

Proposition 3.2 ([Mcd], (2.7)) *ω est une involution.*

Dém. Il suffit d'appliquer ω à l'identité (3.8). $\square$

Par conséquence, ω est un automorphisme de Sym, $Sym = K[h_1, h_2, \ldots]$ et l'ensemble $\{h_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ forme une base de Sym_n. L'identité (3.6) se récrit comme

$$nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}, \; n \geq 1. \tag{3.9}$$

Cette dernière équation nous permet d'écrire dans K les $\{h_n\}$ en fonction des $\{p_n\}$ et viceversa (K contient $\mathbf{Q}$): les $\{p_n\}$ sont algébriquement indépendants et $Sym = K[p_1, p_2, \ldots]$. Explicitement, on obtient

$$h_n = \sum_{|\lambda|=n} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}, \tag{3.10}$$

où $z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!$, pour $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots)$. De plus, comme ω échange $E(t)$ avec $H(t)$, de (3.6) on obtient

$$P(-t) = E'(t)/E(t). \tag{3.11}$$

De (3.9) et (3.11) on déduit

$$\omega(p_n) = (-1)^{n-1} p_n. \tag{3.12}$$

Soit

$$f_\lambda = \omega(m_\lambda). \tag{3.13}$$

L'ensemble des $\{f_\lambda\}$ forme une base de Sym, puisque ω est un automorphisme (c'est la "forgotten basis" dans Macdonald [Mcd] Chapitre 1). On reviendra sur cette base plus tard (voir Corollaire 3.13).

3.2 Coproduits dans Sym

Soient X et Y deux ensembles disjoints, infinis, totalement ordonnés de variables. On dénotera par $e_\lambda(x)$, $p_\lambda(x)$, etc. les fonctions symétriques dans les variables X, par $e_\lambda(y)$, $p_\lambda(y)$, etc. les fonctions symétriques dans les Y. On étend l'ordre total de X et Y au nouvel ensemble de variables $X \cup Y$ en ajoutant la relation:

$$x < y \text{ pour tout } x \in X, y \in Y.$$

On définit alors, pour toute fonction symétrique g, la fonction $g(x,y)$ sur l'ensemble $X \cup Y$. Toujours, on peut écrire

$$g(x,y) = \sum_i g_i(x) g_i'(y),$$

où les fonctions g_i et g_i' sont symétriques. Ceci nous permet de définir sur l'algèbre des fonctions symétriques le coproduit

$$\begin{aligned} \gamma: \quad & Sym \longrightarrow Sym \otimes Sym \\ & g \longmapsto \gamma(g) = \textstyle\sum_i g_i \otimes g_i'. \end{aligned}$$

Calculons γ sur la base des fonctions élémentaires e_n. On a:

$$\begin{aligned} e_n(x,y) &= \sum_{\substack{z_1 < \ldots < z_n \\ z_1, \ldots, z_n \in X \cup Y}} z_1 \ldots z_n \\ &= \sum_{\substack{z_1 < \ldots < z_n \\ z_1, \ldots, z_i \in X \\ z_{i+1}, \ldots, z_n \in Y}} z_1 \ldots z_n \\ &= \sum_{i=0}^{n} e_i(x) e_{n-i}(y), \end{aligned}$$

donc

$$\gamma(e_n) = \sum_{i=0}^{n} e_i \otimes e_{n-i}.$$

Pour les sommes de puissances on obtient si $n > 0$

$$p_n(x,y) = \sum_{z \in X \cup Y} z^n = p_n(x) + p_n(y),$$

et

$$\gamma(p_n) = p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n.$$

Soit $\epsilon : Sym \longrightarrow K$ l' application qui associe à toute fonction symétrique son terme constant. Le résultat suivant est bien connu (voir [Gei], [Thi], [Z]).

Théorème 3.3 *L'algèbre Sym avec coproduit γ et co-unité ϵ est une algèbre de Hopf graduée, dont l'antipode est l'application linéaire donnée par*

$$S(g) = (-1)^n \omega(g), \text{si } g \in Sym_n.$$

Dém. D'abord, γ est un morphisme d'algèbres: si $g(x,y) = \sum_i g_i(x) g'_i(y)$ et $h(x,y) = \sum_j h_j(x) h'_j(y)$, alors $gh(x,y) = g(x,y)h(x,y) = \sum_{i,j} g_i h_j(x) g'_i h'_j(y)$, donc

$$\gamma(gh) = \sum_{i,j} g_i h_j \otimes g'_i h'_j = (\sum_i g_i \otimes g'_i)(\sum_j h_j \otimes h'_j) = \gamma(g)\gamma(h);$$

ϵ est aussi un morphisme, car le terme constant du produit de deux séries formelles est le produit des termes constants de chaque série. De plus, $\gamma(1) = 1 \otimes 1$.
Ensuite,(Sym, γ, ϵ) est une cogèbre, car γ et ϵ satisfont les propriétés (2.1), (2.2) et (2.3) de coassociativité et co-unitarité:

$$\begin{aligned}
(\gamma \otimes 1) \circ \gamma(p_n) \quad &= (\gamma \otimes 1)(p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n) \\
&= p_n \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes p_n \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes p_n \\
&= (1 \otimes \gamma)(p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n) = (1 \otimes \gamma) \circ \gamma(p_n);
\end{aligned}$$

$$(1 \otimes \epsilon) \circ \gamma(p_n) = (1 \otimes \epsilon)(p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n) = p_n \otimes 1;$$

$$(\epsilon \otimes 1) \circ \gamma(p_n) = (\epsilon \otimes 1)(p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n) = 1 \otimes p_n.$$

Il a suffit de vérifier les relations (2.1) - (2.3) sur la base $\{p_n\}$ car, γ et ϵ étant des morphismes d'algèbres, $(\gamma \otimes 1) \circ \gamma$, $(1 \otimes \epsilon) \circ \gamma$ et $(\epsilon \otimes 1) \circ \gamma$ le sont aussi.
Indiquons par $\mu : Sym \otimes Sym \longrightarrow Sym : f \otimes g \longmapsto fg$ et par $\eta : K \longrightarrow Sym :$

$1 \longmapsto 1$ respectivement la multiplication usuelle des séries formelles et l'application unité dans Sym. L'application S est un morphisme d'algèbres, car ω l'est; μ est un morphisme pour l'algèbre $Sym \otimes Sym$. Par conséquence l'application $\mu \circ (S \otimes 1) \circ \gamma$ est un morphisme pour l'algèbre Sym, et on peut vérifier la relation (2.6) sur la base $\{p_n\}$:

$$\begin{aligned} \mu \circ (S \otimes 1) \circ \gamma(p_n) = \ & \mu \circ (S \otimes 1)(1 \otimes p_n + p_n \otimes 1) \\ & = \mu(1 \otimes p_n + (-1)^{2n-1} p_n \otimes 1) \\ & = \mu(1 \otimes p_n - p_n \otimes 1) \\ & = p_n - p_n = 0 = \eta \circ \epsilon(p_n), \end{aligned}$$

De manière analogue on peut vérifier que $\mu \circ (1 \otimes S) \circ \gamma = \eta \circ \epsilon$. □

On appelle γ le *coproduit externe*. Nous pouvons aussi définir un autre coproduit γ', dit *coproduit interne* (voir Gessel [Ges], Thibon [Thi]). Soit

$$XY = \{xy | x \in X, y \in Y\};$$

par $g(xy)$ on dénote la fonction symétrique g dans l'alphabet produit XY. Si

$$g(xy) = \sum_i g_i(x) g'_i(y)$$

est la decomposition de g dans les variables X et Y, on définit:

$$\begin{aligned} \gamma' : \ & Sym \longrightarrow Sym \otimes Sym \\ & g \longmapsto \gamma'(g) = \textstyle\sum_i g_i \otimes g'_i. \end{aligned}$$

Par exemple on a, pour $n \geq 0$:

$$p_n(xy) = \sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} x^n y^n = \sum_{x \in X} x^n \sum_{y \in Y} y^n = p_n(x) p_n(y)$$

d'où

$$\gamma'(p_n) = p_n \otimes p_n. \tag{3.14}$$

Soit $\epsilon' : Sym \longrightarrow K$ l'application définie sur la base $\{p_\lambda\}$ de Sym par $\epsilon'(p_\lambda) = 1$.

Théorème 3.4 *Avec coproduit γ' et counité ϵ', produit et unité usuels, Sym est une bigèbre cocommutative.*

Dém. De la même façon que dans le Théorème 3.3, on démontre que γ' est un morphisme d'algèbres; de plus $\epsilon'(p_\mu p_\nu) = \epsilon'(p_{\lambda(\mu\nu)}) = 1$, donc ϵ' aussi est un morphisme d'algèbres. Il reste alors à montrer que $(Sym, \gamma', \epsilon')$ est une cogèbre: nous vérifions les relations (2.1) - (2.3) sur les sommes de puissances, car $(\gamma' \otimes 1) \circ \gamma'$, $(1 \otimes \epsilon') \circ \gamma'$ et $(\epsilon' \otimes 1) \circ \gamma'$ sont des morphismes d'algèbres. On a:

$$\begin{aligned}(1 \otimes \gamma') \circ \gamma'(p_n) &= (1 \otimes \gamma')(p_n \otimes p_n) = p_n \otimes (p_n \otimes p_n) \\ &= \gamma'(p_n) \otimes p_n = (\gamma' \otimes 1)(p_n \otimes p_n) \\ &= (\gamma' \otimes 1) \circ \gamma'(p_n);\end{aligned}$$

$$(1 \otimes \epsilon') \circ \gamma'(p_n) = (1 \otimes \epsilon')(p_n \otimes p_n) = p_n \otimes 1;$$

$$(\epsilon' \otimes 1) \circ \gamma'(p_n) = (\epsilon' \otimes 1)(p_n \otimes p_n) = 1 \otimes p_n.$$

Pour la cocommutativité, on a

$$\tau \circ \gamma'(p_n) = \tau(p_n \otimes p_n) = p_n \otimes p_n = \gamma'(p_n),$$

donc l'égalité $\tau \circ \gamma' = \gamma'$ est vérifié pour tout élément de Sym, car τ et γ' sont des morphismes d'algèbres. $\Box$

Remarque 3.5 La cocommutativité signifie que si $g(xy) = \sum_i g_i(x) g'_i(y)$, alors on a aussi $g(xy) = \sum_i g_i(y) g'_i(x)$.

Calculons explicitement la valeur de la co-unité ϵ' sur la base des fonctions homogènes et élémentaires. D'abord, on observe que $p_0 = h_0 = e_0 = 1$ et $p_1 = h_1 = e_1$, d'où

$\epsilon'(h_i) = \epsilon'(e_i) = 1$ pour $i = 0, 1$. En appliquant ϵ' à l'identité (3.9), on obtient

$$\epsilon'(nh_n) = \sum_{r=1}^{n} \epsilon'(p_r h_{n-r}),$$

et, puisque ϵ' est un morphisme, on a

$$\begin{aligned} \epsilon'(h_n) &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \epsilon'(p_r)\epsilon'(h_{n-r}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon'(h_i). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Par récurrence sur n, l'identité (3.15) montre que

$$\epsilon'(h_n) = 1 \text{pour tout } n \geq 0. \tag{3.16}$$

Analoguement, si l'on applique le morphisme ϵ' aux deux membres de l'identité (3.8), on trouve

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \epsilon'(e_r)\epsilon'(h_{n-r}) = 0,\ n \geq 1,$$

i.e. l'identité

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \epsilon'(e_r) = 0,\ n \geq 1;$$

la récurrence sur n implique que

$$\epsilon'(e_n) = 0 \text{ pour tout } n \geq 2. \tag{3.17}$$

3.3 Autodualité

Soit $\langle\ ,\ \rangle : Sym \times Sym \longrightarrow K$ le produit scalaire défini sur les bases des fonctions homogènes et monomiales par

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu},$$

où $\delta_{\lambda\mu}$ est le delta de Kronecker. Nous pouvons ainsi identifier l'espace Sym et son dual gradué à l'aide de ce produit scalaire via l'isomorphisme $Sym \longrightarrow Sym^* : f \longmapsto \langle f, \ . \ \rangle$. On muni $Sym \otimes Sym$ du produit scalaire induit:

$$\langle f \otimes g, p \otimes q \rangle = \langle f, p \rangle \langle g, q \rangle.$$

On peut montrer que ([Mcd], (4.6))

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}$$

et

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

de sorte que les p_λ et les s_λ forment une base respectivement orthogonale et orthonormale de Sym. De plus, l'involution ω est une isométrie, i.e. $\langle f, g \rangle = \langle \omega(f), \omega(g) \rangle$. Le Lemme suivant est bien connu (voir [Mcd], (5.9)).

Lemme 3.6 *Pour toute partition λ, μ, ν on a*

$$\langle s_\mu s_\nu, s_\lambda \rangle = \langle s_\mu \otimes s_\nu, \gamma(s_\lambda) \rangle$$

Dém. Les $\{s_\lambda\}$ étant une base orthonormale de Sym, toute fonction symétrique est déterminée par les produits scalaires avec les $\{s_\lambda\}$:

$$f = \sum_\lambda \langle f, s_\lambda \rangle s_\lambda.$$

Soit donc $c^\lambda_{\mu\nu} = \langle s_\mu s_\nu, s_\lambda \rangle$ le coefficient du développement du produit $s_\mu s_\nu$ dans cette base. Observons que $c^\lambda_{\mu\nu} = c^\lambda_{\nu\mu}$ car le produit dans Sym est commutatif. En utilisant l'identité suivante ((5.9) dans [Mcd])

$$s_\lambda(x, y) = \sum_{\rho,\sigma} c^\lambda_{\rho\sigma} s_\rho(y) s_\sigma(x) = \sum_{\rho,\sigma} c^\lambda_{\rho\sigma} s_\rho(x) s_\sigma(y),$$

on obtient

$$\gamma(s_\lambda) = \sum_{\rho,\sigma} c^\lambda_{\rho\sigma} s_\rho \otimes s_\sigma,$$

d'où

$$\langle s_\mu \otimes s_\nu, \gamma(s_\lambda)\rangle = c^\lambda_{\mu\nu} = \langle s_\mu s_\nu, s_\lambda\rangle.\square$$

Par bilinéarité du produit scalaire, le Lemme 3.6 affirme que

$$\langle \mu(f\otimes g), h\rangle = \langle f\otimes g, \gamma(h)\rangle, \text{ pour tout } \ f,g,h \in Sym,$$

i.e. le produit usuel μ des fonctions symétriques est l'adjoint de γ. Or le membre droit de cette égalité est simplement le produit dual du coproduit γ dans Sym de f et g (voir la définition (2.7)), via l'identification $Sym \simeq Sym^*$. De plus, l'application $u : K \longrightarrow Sym^*$ duale de la co-unité ϵ (voir (2.8)) est définie par

$$u(1)(g) = \epsilon(g) = \langle g, 1\rangle,$$

ce qui implique $u = \eta$. Ceci démontre (voir [Gei], [Thi], [Z]):

Proposition 3.7 *L'algèbre duale Sym^* de la cogèbre (Sym, γ, ϵ) est isomorphe à l'algèbre (Sym, μ, η), i.e. Sym est une algèbre de Hopf auto-duale.*

On peut définir sur l'espace Sym un autre produit de la manière suivante. Soit R^n l'espace vectoriel sur K engendré par les charactères irréductibles du groupe symétrique S_n et $R = \oplus_{n\geq 0} R^n$ l'espace gradué qui en résulte. R devient une algèbre commutative, associative et graduée avec le produit qui correspond au produit tensoriel de représentations:

$$s\cdot r = ind^{S_{n+m}}_{S_n\times S_m}(s\times s), \ s\in R^n, \ r \in R^m.$$

Soit $\langle\ ,\ \rangle_n$ le produit scalaire usuel de charactères dans le groupe symétrique, i.e.

$$\langle \chi, \eta\rangle_n = \frac{1}{n!}\sum_{w\in S_n} \chi(w)\eta(w^{-1}).$$

On étend ce produit scalaire à tout R par

$$\langle r, s\rangle = \sum_n \langle r_n, s_n\rangle_n,$$

où $r = \sum_n r_n$ et $s = \sum_n s_n \in R$. Si $r \in R^n$, on indique par $r(\lambda)$ sa valeur sur la classe de conjugaison de S_n de type cyclique λ. La *fonction charactéristique de Frobenius* est l'application linéaire $ch : R \longrightarrow Sym$ définie par

$$ch(r) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f(\rho) p_\rho, \;\; r \in R^n.$$

Il est bien connu que ch est une isométrie de R à Sym ([Mcd], I-(7.3)), i.e.

$$\langle ch(s), ch(r)\rangle = \langle s, r\rangle \quad s, r \in R.$$

Le *produit interne* $f \diamond g$ de deux fonctions symétriques f et $g \in Sym_n$ est l'opération qui correspond au produit de charactères, il est donc défini par

$$f \diamond g = ch(ch^{-1}(f) ch^{-1}(g)).$$

De plus si η_n est le charactère de la représentation triviale de S_n, on a

$$\begin{aligned} ch(\eta_n) &= \sum_{|\rho|=n} \frac{1}{z_\rho} \eta_n(\rho) p_\rho \\ \text{(par (3.10))} \qquad &= \sum_{|\rho|=n} \frac{p_\rho}{z_\rho} = h_n, \end{aligned}$$

donc pour tout $f \in Sym_n$

$$f \diamond h_n = h_n \diamond f = f.$$

Il en suit que l'application $u' : K \longrightarrow Sym_n$ définie par $u'(1) = h_n$ est bien l'unité pour le produit interne.

Dans [Thi], Thibon montre que (voir aussi (7.9) dans [Mcd] et [Ges]):

Proposition 3.8 *L'adjoint sur Sym_n du produit interne est le coproduit interne γ':*

$$\langle f \diamond g, h\rangle = \langle f \otimes g, \gamma'(h)\rangle.$$

Dém. Il suffit de montrer l'identité équivalente

$$\langle p_\lambda/z_\lambda \diamond p_\mu/z_\mu, p_\nu\rangle = \langle p_\lambda/z_\lambda \otimes p_\mu/z_\mu, \gamma'(p_\nu)\rangle.$$

Pour $\lambda \vdash n$ dénotons par $\phi^\lambda \in R^n$ la fonction charactéristique de la classe de conjugaison de type cyclique λ, i.e. $\phi^\lambda(\rho) = \delta_{\lambda\rho}$. On a

$$ch(\phi^\lambda) = \sum_{|\rho|=n} \frac{1}{z_\lambda}\phi^\lambda(\rho)p_\rho = \frac{p_\lambda}{z_\lambda},$$

c'est-à-dire

$$ch^{-1}(\frac{p_\lambda}{z_\lambda}) = \phi^\lambda.$$

Comme $\gamma'(p_n) = p_n \otimes p_n$ et γ' est un morphisme d'algèbres, on a aussi

$$\gamma'(p_\lambda) = p_\lambda \otimes p_\lambda.$$

On rappelle que $\langle p_\rho/z_\rho, p_\sigma\rangle = \delta_{\rho\sigma}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle p_\lambda/z_\lambda \diamond p_\mu/z_\mu, p_\nu\rangle &= \langle ch(ch^{-1}(p_\lambda/z_\lambda)ch^{-1}(p_\mu/z_\mu), p_\nu\rangle \\ &= \phi^\lambda \cdot \phi^\mu, \phi^\nu\rangle = \phi^\lambda(\nu)\cdot\phi^\mu(\nu) = \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\nu} \\ &= \langle p_\lambda/z_\lambda, p_\nu\rangle\langle p_\mu/z_\mu, p_\nu\rangle = \langle p_\lambda/z_\lambda \otimes p_\mu/z_\mu, p_\nu \otimes p_\nu\rangle \\ &= \langle p_\lambda/z_\lambda \otimes p_\mu/z_\mu, \gamma'(p_\nu)\rangle. \square\end{aligned}$$

Corollaire 3.9 *L'algèbre duale de la cogèbre* $(Sym_n, \gamma', \epsilon')$ *est isomorphe à l'algèbre* $(Sym, \diamond, u')$.

Dém. La Proposition 3.8 affirme que le produit interne $\diamond$ est le dual du coproduit interne γ', via l'identification $Sym \simeq Sym^*$. Il nous reste à montrer que l'unité $\overline{u}$ duale de ϵ' définie par la relation $\overline{u}(1) = \epsilon'$ (voir (2.8)), coïncide avec u'. On a vu que $h_n = \sum_{|\lambda|=n} m_\lambda$. Or, les bases $\{h_\lambda\}$ et $\{m_\nu\}$ sont orthogonales pour le produit scalaire. Il en suit que $\langle h_n, h_n\rangle = 1 = \epsilon'(h_n)$; en particulier $\epsilon'(g) = \langle g, h_n\rangle = u'(1)(g)$ pour tout $g \in S_n$, ce qui implique $u'(1) = \epsilon' = \overline{u}(1)$. $\square$

4 FONCTIONS QUASI-SYMÉTRIQUES

4.1 Définitions

Soit X un ensemble dénombrable totalement ordonné de variables, K un anneau contenant $\mathbf{Q}$, $K[[X]]$ l'algèbre des séries formelles sur X.

Une fonction $F = F(x)$ de $K[[X]]$ est *quasi-symétrique* si le coefficient dans F de $x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$ est égal au coefficient de $y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}$, pour tous x_i, $y_j \in X$ avec $x_1 < \dots < x_m$ et $y_1 < \dots < y_m$, et tous $k_1, \dots, k_m \in \mathbf{N}$.

Il est clair que l'ensemble des fonctions quasi-symétriques forme un sous-module de $K[[X]]$. Nous le noterons $QSym$. Nous verrons plus loin que $QSym$ est une sous-algèbre de $K[[X]]$ (voir Corollaire 4.7). Il est clair aussi que Sym est une sous-algèbre de $QSym$, i.e. toute fonction symétrique est quasi-symétrique. Nous noterons par $QSym_n$ le K-module des fonctions quasi-symétriques homogènes de degré n.

Soit $C = (c_1, \dots, c_k)$ une composition de n; on définit la *fonction quasi-symétrique monomiale* indexée par C par

$$M_C = \sum_{x_1 < \dots < x_k} x_1^{c_1} \dots x_k^{c_k}.$$

Evidemment $M_C \in QSym_n$. En particulier, pour $C = (n)$ on obtient $M_n = p_n$. Il est facile de voir que tout élément de $QSym_n$ est une combinaison linéaire des $\{M_C\}_{C \models n}$: ceux-ci forment une base de $QSym_n$, qui a donc dimension 2^{n-1} sur K. Dans ces notations, les fonctions symétriques monomiales m_λ de (3.1) s'écrivent comme

$$m_\lambda = \sum_{\lambda(C) = \lambda} M_C. \tag{4.1}$$

Pour $D = (d_1, d_2, \dots, d_l)$ composition de n, soit

$$F_D = \sum_{C \geq D} M_C,$$

où $C \geq D$ est l'ordre partiel du raffinement des compositions. On a vu que $C \geq D$ est équivalent à $Des(C) \supseteq Des(D)$, où on avait défini

$$Des(D) = \{d_1, d_1 + d_2, \ldots, d_1 + \ldots + d_{l-1}\}.$$

On peut alors réécrire:

$$\begin{aligned} F_D &= \sum_{C \geq D} \sum_{x_1 < \ldots < x_n} x_1^{c_1} \ldots x_k^{c_k} \\ &= \sum_{C \geq D} \sum_{\substack{x_i < x_{i+1} \text{ si } i \in Des(C) \\ x_i = x_{i+1} \text{ sinon}}} x_1 \ldots x_n \\ &= \sum_{\substack{x_i \leq x_{i+1} \\ x_i < x_{i+1} \text{ si } i \in Des(D)}} x_1 \ldots x_n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donc F_C est la somme de tous les monômes $x_1 \ldots x_n$ satisfaisant la condition

$$x_1 \leq \ldots \leq x_{d_1} < x_{d_1+1} \leq \ldots \leq x_{d_1+d_2} < x_{d_1+d_2+1} \leq \ldots \leq x_n.$$

Par inversion de Möbius on obtient:

$$M_D = \sum_{C \geq D} (-1)^{|C|-|D|} F_C.$$

Donc les $\{F_C\}_{C \models n}$ aussi forment une base de $QSym_n$.

Exemple. $F_{12} = M_{12} + M_{111} = \sum_{x<y} xy^2 + \sum_{x<y<z} xyz = \sum_{x<y\leq z} xyz$.

4.2 La fonction génératrice d'un ensemble partiellement ordonné

Soit $(P, \leq)$ un alphabet à n lettres totalement ordonné, $P^\star$ le monoïde libre des mots dans l'alphabet P. Souvent, nous prendrons $P = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ avec l'ordre naturel. Soit $<_P$ un ordre partiel sur P. Par $L(P)$ nous désignons l'ensemble des *extensions linéaires* de cet ordre partiel: un élément typique de $L(P)$ est donc un ordre total $<_1$ sur P tel que: $i <_P j \Longrightarrow i <_1 j$. Nous identifierons souvent l'ordre total $<_1$ avec le mot $p_1 p_2 \dots p_n \in P^\star$, où $P = \{p_1 <_1 p_2 <_1 \dots <_1 p_n\}$; ainsi $L(P)$ sera considéré comme l'ensemble des mots w de longueur $|P| = n$ sans répetitions de lettres sur l'alphabet P (i.e. des *mots standard*) tels que si $x \le_P y$ alors x apparaît à la gauche de y dans $w = \dots x \dots y \dots$

Exemple 4.1 P est donné ici par son diagramme de Hasse

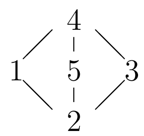


Figure 10.

$L(P) = \{21534, 21354, 25134, 25314, 23154, 23514\}$

Une P-*partition* est une fonction $f : P \longrightarrow X$ telle que:

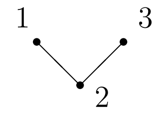
- si $i <_P j$ alors $f(i) \le f(j)$;
- si $i <_P j$ et $i > j$ alors $f(i) < f(j)$.

Dénotons par $A(P)$ l'ensemble des P-partitions. La *fonction génératice* quasi-symétrique de $(P, <_P\ )$ est définie par

$$\Gamma(P) = \sum_{f \in A(P)} \prod_{a \in P} f(a) \in \mathbf{Z}[[X]];$$

elle est donc quasi-symétrique, comme on le voit sur les inégalités qui définissent une P-partition. Noter que si $P = \emptyset$, alors $\Gamma(P) = 1$.

Exemple 4.2 Soit

$P =$ 

Une P-partition typique peut être vue comme l'étiquetage dans la Figure 11 avec les conditions $x < y$, $x \leq z$.

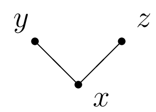


Figure 11.

On a donc

$$\Gamma(P) = \sum_{\substack{x<y \\ x\leq z}} xyz = \sum_{x<y\leq z} xyz + \sum_{x\leq z<y} xzy = F_{12} + F_{21}.$$

Pour $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in P^\star$, soit

$$C(w) = (|u_1|, \ldots, |u_k|)$$

la composition de n associée à w, où $w = u_1 \ldots u_k$ est une décomposition de w en facteurs croissants u_i et k est minimal; soit

$$Des(w) = \{i \in [n-1] | w_i > w_{i+1}\}$$

le sous-ensemble de $[n-1]$ des *descentes du mot* w. Evidemment on a $Des(w) = Des(C(w))$, selon les notation du Chapitre 1. Par exemple, si $w = 72511231$, on obtient $C(w) = 1241$ et $Des(w) = \{1, 3, 7\}$.

A tout mot sans répétition $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ sur un alphabet totalement ordonné nous associons l'ensemble ordonné $P(w)$. Son diagramme de Hasse est dans la Figure 12.

$$\begin{array}{l} w_n \\ | \\ \vdots \\ | \\ w_2 \\ | \\ w_1 \end{array}$$

Figure 12.

Remarque 4.3 Une $P(w)$-partition est une fonction $f : \{w_1, \ldots, w_n\} \longrightarrow X$ telle que si $i < j$ on a $f(w_i) \leq f(w_j)$ et $f(w_i) < f(w_j)$ si de plus $w_i > w_j$. Il en suit donc

$$\Gamma(P(w)) = \sum_{f \in A(w)} f(w_1) \ldots f(w_n) = \sum_{\substack{x_i \leq x_{i+1} \\ x_i < x_{i+1} \text{ si } i \in Des(w)}} x_1 \ldots x_n = F_{C(w)},$$

c'est-à-dire $\Gamma(P(w))$ ne dépend que des descentes du mot w.

Le Lemme suivant, déjà prouvé par MacMahon [Mcm] Vol.2, 188-212 qui le démontre dans des cas speciaux, et par Knuth [K1], pour les ensembles partiellement ordonnés à étiquetage naturel, est du dans sa formulation général à Stanley [Sta] (voir aussi Gessel [Ges], Theorem 1).

Lemme 4.4 $A(P) = \cup_{w \in L(P)} A(P(w))$ *(réunion disjointe).*

Le Lemme précédent avec la Remarque 4.3, implique le résultat suivant (voir [Sta]):

Corollaire 4.5 $\Gamma(P) = \sum_{w \in L(P)} \Gamma(P(w)) = \sum_{w \in L(P)} F_{C(w)}$.

Proposition 4.6 *Supposons que $P = P_1 \cup P_2$ est une partition de P telle que les éléments de P_1 soient incomparables aux éléments de P_2 pour l' ordre partiel $<_P$. Alors*

$$\Gamma(P_1 \cup P_2) = \Gamma(P_1)\Gamma(P_2).$$

Dém. L'application $A(P_1 \cup P_2) \longrightarrow A(P_1) \times A(P_2)$ donnée par $f \longmapsto (f|_{P_1}, f|_{P_2})$ est une bijection, P_1 et P_2 étant disjoints: on a donc

$$\begin{aligned}\Gamma(P_1 \cup P_2) &= \sum_{f \in A(P_1 \cup P_2)} \prod_{a \in P_1 \cup P_2} f(a) \\ &= \sum_{g \in A(P_1)} \sum_{h \in A(P_2)} \prod_{a \in P_1} g(a) \prod_{a' \in P_2} h(a') \\ &= \Gamma(P_1)\Gamma(P_2).\square\end{aligned}$$

Corollaire 4.7 *$QSym$ est une sous-algèbre de $K[[X]]$.*

Dém. Il suffit de vérifier que le produit de deux éléments de la base $\{F_C\}$ est quasi-symétrique. Si $C \models n$ et $D \models m$, soient u et v deux mots sans répétition sur $\{1, \ldots, n\}$ et $\{n+1, \ldots, n+m\}$ respectivement tels que $C(u) = C$ et $C(v) = D$. L'ensemble partiellement ordonné $P = P(u) \cup P(v)$ satisfait les hypothèses de la Proposition 4.6; on a alors

$$F_C F_D = \Gamma(P(u))\Gamma(P(v)) = \Gamma(P(u) \cup P(v)) \in QSym.\square$$

Le résultat suivant est évidant.

Lemme 4.8 $L(P) = \sum_{a \in \min P} aL(P \setminus a)$, *où* $\min P$ *est l'ensemble des éléments minimaux de P.*

Proposition 4.9 *Dans les hypothèses de la Proposition 4.6 on a*

$$L(P_1 \cup P_2) = L(P_1) \sqcup\!\sqcup\, L(P_2)$$

Dém. Par récurrence sur $|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2|$, l'enoncé étant vrai pour $|P_1 \cup P_2| = 0$. On utilise l'identité (2.10), qui s'étend, plus généralement, à l'identité

$$aU \sqcup\!\sqcup\, bV = a(U \sqcup\!\sqcup\, bV) + b(aU \sqcup\!\sqcup\, V), \tag{4.3}$$

pour $U, V \in K < A >$.

Soit $M_1 = \min P_1$, $M_2 = \min P_2$. Rémarquons que, comme P_1 et P_2 sont disjoints, on a

$$\min(P_1 \cup P_2) = M_1 \cup M_2 \text{ et } M_1 \cap M_2 = \emptyset. \tag{4.4}$$

Or,

$$\begin{array}{lcl}
 & & L(P_1) \sqcup\!\sqcup L(P_2) \\
\text{(Lemme (4.8))} & = & \sum_{a \in M_1} aL(P_1 \setminus a) \sqcup\!\sqcup \sum_{a' \in M_2} a'L(P_2 \setminus a') \\
\text{(par(4.3))} & = & \sum_{a \in M_1} a(L(P_1 \setminus a) \sqcup\!\sqcup \sum_{a' \in M_1} a'L(P_2 \setminus a'))+ \\
 & & + \sum_{a' \in M_2} a'(\sum_{a \in M_1} aL(P_1 \setminus a) \sqcup\!\sqcup L(P_2 \setminus a')) \\
\text{(Lemme (4.8))} & = & \sum_{a \in M_1} a(L(P_1 \setminus a) \sqcup\!\sqcup L(P_2)) + \sum_{a' \in M_2} a'(L(P_1) \sqcup\!\sqcup L(P_2 \setminus a')) \\
\text{(récurrence)} & = & \sum_{a \in M_1} aL((P_1 \cup P_2) \setminus a) + \sum_{a' \in M_2} a'L((P_1 \cup P_2) \setminus a') \\
\text{(par(4.4))} & = & \sum_{b \in \min(P_1 \cup P_2)} bL((P_1 \cup P_2) \setminus b) \\
\text{(Lemme (4.8))} & = & L(P_1 \cup P_2).\Box
\end{array}$$

Corollaire 4.10

$$F_{C(u)} F_{C(v)} = \sum_{w \in u \sqcup\!\sqcup v} F_{C(w)}. \tag{4.5}$$

Dém. De la Proposition 4.6 et 4.9, en gardant les notations de la preuve du Corollaire 4.7, on déduit

$$F_{C(u)} F_{C(v)} = \Gamma(P(u) \cup P(v)) = \sum_{w \in L(P(u) \cup P(v))} F_{C(w)} = \sum_{w \in u \sqcup\!\sqcup v} F_{C(w)},$$

ce qui donne le developpement du produit dans la base $\{F_C\}$. $\Box$

Par exemple, pour $C = (12)$ et $D = (11)$, soit $u = 312$, $v = 54$; on calcule $u \sqcup\!\sqcup v = 31254 + 31524 + 35124 + 53124 + 31542 + 35142 + 35412 + 53142 + 53412 + 54312$, et on obtient

$$F_{12} F_{11} = F_{23} + F_{113} + 2F_{122} + F_{131} + F_{212} + F_{221} + F_{1112} + F_{1121} + F_{1211}.$$

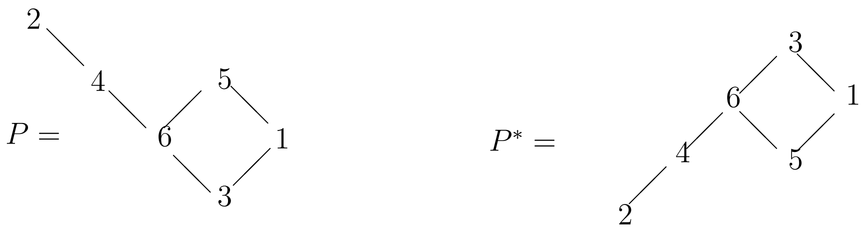


Figure 13.

Soit $\omega : QSym \longrightarrow QSym$ l'application linéaire définie sur la base $\{F_C\}$ de $QSym$ par

$$\omega(F_C) = F_{C'}, \tag{4.6}$$

où on rappelle que C' est la composition conjuguée de C.

Le *dual* P^* de P est l'ordre partiel $\leq_{P^*}$ sur les mêmes éléments que P, mais tel que

$$a \leq_{P^*} b \Longleftrightarrow b \leq_P a.$$

Voir par exemple P et P^* dans la Figure 13.

Théorème 4.11 (Gessel, [Ges])

$$\omega(\Gamma(P)) = \Gamma(P^*)$$

Dém. D'abord on se restreint au cas où P est un ordre linéaire, donc il peut être identifié au mot $w = w_1 \dots w_n$ tel que $L(P) = \{w\}$ (voir Figure 12). Dans ce cas on a $\Gamma(P) = F_{C(w)}$. Or, P^* est l'ordre linéaire qui correspond au mot $w^\sim = w_n \dots w_1$: montrons que

$$C(w^\sim) = C(w)'. \tag{4.7}$$

En effet on a

$$\begin{aligned}
i \in Des(C(w^\sim)) &\iff w_{n+1-i} > w_{n+1-(i+1)} = w_{n-i} \\
&\iff n-i \notin Des(C(w)) \\
&\iff n-i \in [n-1] \setminus Des(C(w)) \\
\text{(par le Corollaire 1.10)} \qquad &\iff n-i \in Des(C(w)'^\sim) \\
\text{(par 1.2)} \qquad &\iff i \in Des(C(w)'^{\sim\sim}) = Des(C(w)').
\end{aligned}$$

Alors

$$\omega(\Gamma(P)) = \omega(F_{C(w)}) = F_{C(w)'} = F_{C(w^\sim)} = \Gamma(P^*).$$

Le cas général suit immédiatement de l'égalité $\Gamma(P) = \sum_{w \in L(P)} F_{C(w)}$, par linéarité de ω, si on remarque que $L(P^*) = \{w^\sim | w \in L(P)\}$. $\square$

Le résultat suivant est du à Gessel [Ges1].

Théorème 4.12 *L'application ω est un automorphisme de QSym; de plus la restriction de ω à l'algèbre Sym est bien le même ω défini dans le Chapitre 3.*

Dém. Il est clair que si $P = P_1 \cup P_2$ où les éléments de P_1 sont incomparables aux éléments de P_2, on a $(P_1 \cup P_2)^* = P_1^* \cup P_2^*$. Avec les notations de la preuve du Corollaire 4.7 on a

$$\begin{aligned}
& \omega(F_C F_D) = \omega(\Gamma(u)\Gamma(v)) \\
\text{(Proposition 4.6)} \quad &= \quad \omega(\Gamma(P(u) \cup P(v))) \\
\text{(Théorème 4.11)} \quad &= \quad \Gamma((P(u) \cup P(v))^*) = \Gamma(P(u)^* \cup P(v)^*) \\
\text{(Proposition 4.6)} \quad &= \quad \Gamma(P(u)^*)\Gamma(P(v)^*) \\
\text{(Théorème 4.11)} \quad &= \quad \omega(\Gamma(u))\omega(\Gamma(v)) = \omega(F_C)\omega(F_D),
\end{aligned}$$

ce qui démontre la première assertion.

De plus, pour la composition $C = (1^r) = (1, \ldots, 1)$ on a $C' = (r)$, donc

$$\omega(e_r) = \omega\left(\sum_{x_1 < \ldots < x_r} x_1 \ldots x_r\right) = \omega(F_{(1^r)}) = F_{(r)} = \sum_{x_1 \leq \ldots \leq x_r} x_1 \ldots x_r = h_r. \square$$

Soit $\rho : QSym \longrightarrow QSym$ l'application linéaire définie sur la base $\{F_C\}$ de $QSym$ par (voir Gessel [Ges1]):

$$\rho(F_C) = F_{C^\sim}.$$

Montrons que ρ est un homomorphisme, i.e. $\rho(F_C F_D) = \rho(F_C)\rho(F_D)$. Il suffit de prouver ceci quand X est fini. Dans ce cas, soit $x \mapsto \zeta(x)$ l'involution qui inverse l'ordre de X. On prolonge ζ en une application de tout $K[[X]]$. Montrons que $F_{C^\sim} = \zeta(F_C)$ (cela démontrera l'assertion). On a

$$\begin{aligned}
F_{C^\sim}(x) &= \sum_{\substack{x_i \leq x_{i+1} \\ x_i < x_{i+1} \text{ si } i \in Des(C^\sim)}} x_1 \dots x_n \\
(y_i = \zeta(x_i)) \qquad &= \zeta(\sum_{\substack{y_i \geq y_{i+1} \\ y_i < y_{i+1} \text{ si } i \in Des(C^\sim)}} y_n \dots y_1) \\
(y_i = z_{n+1-i}) \qquad &= \zeta(\sum_{\substack{z_i \leq z_{i+1} \\ z_{n-i} < z_{n+1-i} \text{ si } i \in Des(C^\sim)}} z_1 \dots z_n).
\end{aligned}$$

Comme $i \in Des(C^\sim)$ si et seulement si $n-i \in Des(C)$, on obtient $F_{C^\sim}(x) = \zeta(F_C(x))$. $\square$

Théorème 4.13 (Gessel [Ges1]) *L'application ρ est un automorphisme de $QSym$. De plus, sa restriction à Sym est l'identité de cette algèbre.*

Dém. Comme ρ est une involution, il s'ensuit que l'homomorphisme ρ est une bijection, i.e. un automorphisme. De plus, $\rho(p_n) = \rho(F_{(1^n)}) = F_{(1^n)^\sim} = F_{(1^n)} = p_n$, donc $\rho|_{Sym} = id$. $\square$

Soit $a \mapsto \overline{a}$ la bijection de P qui inverse l'ordre total de P. Pour $w = w_1 \dots w_n \in P^\star$, soit $\overline{w} := \overline{w}_1 \dots \overline{w}_n$. Or,

$$\begin{aligned}
(\text{par définition de } \overline{w}) \qquad i \in Des(C(\overline{w})) &\Longleftrightarrow i \notin Des(C(w)) \\
&\Longleftrightarrow i \in [n-1] \setminus Des(C(w)) \\
(\text{Corollaire 1.10 }) \qquad &\Longleftrightarrow i \in Des(C(w))^{\sim\prime}.
\end{aligned}$$

Figure 14.

Il suit que

$$C(w)^{\sim} = C(\overline{w})' = C(\overline{w}^{\sim}), \tag{4.8}$$

où pour la dernière égalité on a utilisé (4.7).

Soit $(\overline{P}, \leq_P)$ l'ensemble partiellement ordonné qu'on obtient de $(P, \leq_P)$ en inversant l'ordre total de P: plus précisément, $a \leq_P b$ si et seulement si $\bar{a} \leq_P \bar{b}$. Pour un exemple, voir la Figure 14. Il est facile de voir que $L(\overline{P}) = \{\overline{w} |\ w \in L(P)\}$.

Proposition 4.14 $\rho(\Gamma(P)) = \Gamma(\overline{P}^*)$.

Dém. Pour commencer, soit $P = P(w)$ l'ordre linéaire correspondant au mot $w \in P^\star$. Alors

$$\begin{aligned} \rho(\Gamma(P(w)) &= \rho(F_{C(w)}) = F_{C(w)^{\sim}} \\ \text{(par (4.8))} \qquad &= F_{C(\overline{w}^{\sim})} = \Gamma(P(\overline{w}^{\sim})) \\ &= \Gamma(\overline{P}^*). \end{aligned}$$

Dans le cas de P quelconque, l'énoncé est vérifié puisque $L(\overline{P}^*) = \{\overline{w}^{\sim} |\ w \in L(P)\}$ et $\Gamma(P) = \sum_{w \in L(P)} F_{C(w)}$. $\square$

4.3 Coproduit externe dans $QSym$

Considérons un autre ensemble infini totalement ordonné de variables Y disjoint de X; on étend l'ordre total de X et Y à $X \cup Y$ par

$$x < y \text{ pour tout } x \in X, y \in Y. \tag{4.9}$$

Comme on l'a fait pour l'algèbre Sym, si $G(x) \in QSym(x)$,soit $G(x,y)$ la fonction dans les variables $X \cup Y$ et

$$G(x,y) = \sum_i G_i(x) G'_i(y) \tag{4.10}$$

sa décomposition avec $G_i(x) \in K[[x]]$, $G'_i(y) \in K[[y]]$.

Calculons cette decomposition pour les fonctions de la base $\{M_C\}$. Si $C = (c_1, \ldots, c_k)$, on a

$$M_C(x) = \sum x_1^{c_1} \ldots x_k^{c_k},$$

où on somme sur les $x_j \in X$ qui vérifient la condition $x_1 < \ldots < x_k$, donc, par (4.9)

$$M_C(x,y) = \sum x_1^{c_1} \ldots x_i^{c_i} y_{i+1}^{c_{i+1}} \ldots y_k^{c_k},$$

où la deuxième somme est sur les $x_j \in X$ et les $y_j \in Y$ qui vérifient les conditions $x_1 < \ldots < x_i$ et $y_{i+1} < \ldots < y_k$. Cela revient à

$$\begin{aligned} M_C(x,y) &= \sum_{0 \leq i \leq k} M_{(c_1,\ldots,c_i)}(x) M_{(c_{i+1},\ldots,c_k)}(y) \\ &= \sum_{C=DE} M_D(x) M_E(y). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Quand on exprime $G(x,y)$ dans la base des $\{M_C\}$, le calcul ci-dessus montre que dans l'écriture (4.10) les séries $G_i(x)$ et $G'_i(x)$ sont en effet quasi-symétriques et que la somme est finie. Ceci nous permet de définir le coproduit

$$\begin{aligned} \gamma : \qquad QSym &\longrightarrow QSym \otimes QSym \\ G &\longmapsto \gamma(G) = \sum_i G_i \otimes G'_i. \end{aligned} \tag{4.12}$$

On appellera γ *coproduit externe* , car il étend le coproduit externe qu'on a déjà défini sur Sym.

Soit $\epsilon : QSym \longrightarrow K$ l' application qui associe à toute fonction quasi-symétrique son terme constant. Le but est d'étendre le Théorème 3.3 à tout l'espace $QSym$, c'est-à-dire démontrer que l'application linéaire

$$S(G) = (-1)^n \omega(G), \quad G \in QSym_n$$

est l'antipode de la bigèbre $(QSym, \gamma, \epsilon, \mu, \eta)$, où μ et η indiquent le produit et l'application unité usuels des séries formelles.

Proposition 4.15 *Avec le coproduit externe γ et le produit usuel, $QSym$ est une bigèbre.*

Dém. D'abord nous nous servons de (4.11) pour trouver

$$\gamma(M_C) = \sum_{C=DE} M_D \otimes M_E. \tag{4.13}$$

Comme dans le Théorème 3.3, γ et ϵ sont des morphismes d'algèbre. Le coproduit est coassociatif:

$$\begin{aligned}
(\gamma \otimes 1) \circ \gamma(M_C) &= (\gamma \otimes 1)(\sum_{C=DE} M_D \otimes M_E) \\
&= \sum_{C=DE} \sum_{D=AB} (M_A \otimes M_B) \otimes M_E \\
&= \sum_{C=ABE} M_A \otimes (M_B \otimes M_E) \\
&= \sum_{C=AD} M_A \otimes \gamma(M_D) \\
&= (1 \otimes \gamma)(\sum_{C=AD} M_A \otimes M_D) = (1 \otimes \gamma) \circ \gamma(M_C).
\end{aligned}$$

Aussi on a

$$(1 \otimes \epsilon) \circ \gamma(M_C) = (1 \otimes \epsilon)(\sum_{C=DE} M_D \otimes M_E) = \sum_{C=DE} M_D \otimes \epsilon(M_E) = M_C \otimes 1$$

et de la même façon

$$(\epsilon \otimes 1) \circ \gamma(M_C) = 1 \otimes M_C;$$

en d'autres mots, ϵ est la co-unité pour $QSym$. $\square$

On appelle *idéal inférieur* de l'ordre partiel $(P, \leq_P)$ tout sous-ensemble P_1 de P tel que si $x \leq_P y$ et $y \in P_1$, alors $x \in P_1$. On dira que $P_2 \subseteq P$ est un *idéal supérieur* dans $(P, \leq_P)$ si pour $x \leq_P y$ et $x \in P_2$, on a $y \in P_2$. Il est facile de voir que P_1 est un idéal inférieur si et seulement si $P_2 = P \setminus P_1$ est un idéal supérieur.

Théorème 4.16

$$\gamma(\Gamma(P)) = \sum \Gamma(P_1) \otimes \Gamma(P_2),$$

où la somme s'étend aux partitions $P_1 \cup P_2 = P$ de P telles que P_1 est un idéal inférieur et P_2 est un idéal supérieur.

Dém. Il s'agit de calculer la fonction $\Gamma(P)(x, y) = \sum_{f \in A(P)} \prod_{p \in P} f(p)$. Dans ce cas, une P-partition est une fonction $f : P \longrightarrow X \cup Y$ qui soit un morphisme des ordres $\leq_P$ de P et $\leq$ de $X \cup Y$, et telles que $f(p) < f(q)$ si $p > q$. Pour éviter toute confusion, on indiquera par $A(P)(x)$ l'ensemble des P- partitions à valeurs dans les variables X. Pour $f \in A(P)(x, y)$ fixée, soit $P_1 = \{p \in P |\ f(p) \in X\}$, $P_2\{p \in P |\ f(p) \in Y\}$. Il est clair que $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, $P_1 \cup P_2 = P$ et que $f|_{P_1} \in A(P)(x)$, $f|_{P_2} \in A(P)(y)$. Montrons maintenant que P est un idéal inférieur (P_2 sera donc un idéal supérieur). Soit $p \in P_1$ et $q \leq_P p$. Alors $f(q) \leq f(p) \in X$, et comme f est un morphisme d'ordre et qu'on a choisit l'ordre sur $X \cup Y$ de sorte que $x < y$ pour tout $x \in X, y \in Y$, forcément $f(q) \in X$, d'où $q \in P_1$. De plus, soit P_1 un idéal inférieur de P, $P_2 = P \setminus P_1$ et $f_1 \in A(P_1)(x)$, $f_2 \in A(P_2)(y)$. Alors la fonction $f : P = P_1 \cup P_2 \longrightarrow X \cup Y$ définie par $f|_{P_i} = f_i$ pour $i = 1, 2$, est une P- partition: la vérification de ce fait est immédiate. On en tire la décomposition suivante:

$$\begin{aligned}
\Gamma(P)(x,y) &= \sum_{f\in A(P)(x,y)} \prod_{p\in P} f(p) \\
&= \sum_{P_1 \text{ idéal inf.}} \sum_{\substack{f_1\in A(P_1)(x)\\ f_2\in A(P\setminus P_1)(y)}} \prod_{p\in P_1} f_1(p) \prod_{p\in P_2} f_2(p) \\
&= \sum_{P_1\cup P_2} \Gamma(P_1)(x)\Gamma(P_2)(y),
\end{aligned}$$

où la réunion $P_1 \cup P_2$ est disjointe et P_1 est un idéal inférieur, P_2 est un idéal supérieur. Le théorème suit de (4.10) et (4.13). □

Corollaire 4.17 *Soit* $w = w_1 \dots w_n$ *tel que* $C(w) = C$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\gamma(F_C) &= \sum_{uv=w} F_{C(u)} \otimes F_{C(u)} && (4.14)\\
&= \sum_{HL=C} F_H \otimes F_L + \sum_{H\circ L=C} F_H \otimes F_L && (4.15)
\end{aligned}$$

Dém. La première égalité suit du Théorème précédent, car $F_C = \Gamma(P(w))$, et tout idéal inférieur P_1 de $P(w)$ correspond à un prefixe $u = w_1 \dots w_i$ de w, i.e. $P_1 = P(u)$. Soit maintenant $w = uv$ avec $u = w_1 \dots w_i$, $v = w_{i+1} \dots w_n$, et $C = (c_1, \dots, c_k)$. Il est clair que si $i \in Des(w) = Des(C)$, alors la composition $C = C(w)$ est la concaténation des composition $C(u)$ et $C(v)$; si $i \notin Des(w)$, alors pour quelque $1 \le h \le k$, on a $C(u) = (c_1, \dots, c_{h-1}, d)$, $C(v) = (f, c_{h+1}, \dots, c_k)$, avec $d + f = c_h$, c'est à-dire $C(u) \circ C(v) = C$: donc (4.15) implique (4.15). □

La bigèbre $QSym = \oplus_{n\ge 0} QSym_n$ étant graduée avec les espaces $QSym_n$ de dimension finie, et le produit et coproduit externe étant homogènes, nous pouvons considérer le dual gradué $QSym^*$, avec la structure de bigèbre duale (voir 2.7, 2.8 et la Remarque 2.1) où le produit et le coproduit Δ sont définis par:

$$\langle \phi\psi, F\rangle = \langle \phi\otimes\psi, \gamma(F)\rangle, \quad \langle \Delta(\phi), F\otimes G\rangle = \langle \phi, FG\rangle, \qquad (4.16)$$

pour $\phi, \psi \in QSym^* = \oplus_{n\geq 0} QSym_n^*$ et $F, G \in QSym$, où on écrit $\langle \phi, F\rangle$ pour $\phi(F)$. La co-unité est définie par $\phi \in QSym_n^* \mapsto \phi(1) = \langle \phi, 1\rangle \in K$.

Soit $\{M_C^*\}$ la base de $QSym^*$ duale de la base $\{M_C\}$ de $QSym$, avec $M_0^* = \epsilon$; on écrira M_n^* à la place de $M_{(n)}^*$.

Théorème 4.18 *La bigèbre $QSym^*$ définie par les relations* 4.16 *est isomorphe à l'algèbre de Hopf de concaténation $K\langle T\rangle$, où $T = \{t_i, i \geq 1\}$. En particulier, c'est une algèbre associative libre.*

Dém. D'abord nous montrons que $QSym^*$ est une algèbre associative, librement engendrée par les éléments M_n^*, $n \geq 1$. Ceci suit par dualité de l'identité (4.13), qui se traduit dans l'identité

$$M_C^* = M_D^* M_E^* \tag{4.17}$$

pour des compositions C, D, E telles que $C = DE$.
Soit $D = (d_1, \ldots, d_i)$, $E = (e_1, \ldots, e_j)$. Alors

$$M_D M_E = \sum x_1^{d_1} \ldots x_i^{d_i} y_1^{e_1} \ldots y_j^{e_j}$$

où les variables dans la somme satisfont les conditions $x_1 < \ldots < x_i$ et $y_1 < \ldots < y_j$. Or, si i ou $j \geq 2$, il n'y a pas de monôme du type x^n dans cette somme, autrement dit, M_n n'apparaît pas dans $M_D M_E$. Si $i = j = 1$, alors $D = (k)$, $E = (l)$ et

$$\begin{aligned} M_D M_E &= M_k M_l = \sum_x x^k \sum_y y^l \\ &= \sum x^{k+l} + \sum_{x<y} x^k y^l + \sum_{x>y} y^l x^k \\ &= M_{l+k} + M_{(k,l)} + M_{(l,k)}. \end{aligned}$$

Ceci veut dire que si on écrit le produit $M_D M_E$ dans la base $\{M_C\}$, l'élément M_n y apparaît si et seulement si $D = (k)$, $E = (l)$ et $n = k+l$, et dans ce cas son coefficient est 1: par la dualité $\langle M_n^*, M_D M_E\rangle = \langle \Delta(M_n^*), M_D \otimes M_E\rangle$, on obtient

$$\Delta(M_n^*) = \sum_{k+l=n} M_k^* \otimes M_l^*. \tag{4.18}$$

Soit P_n^* les éléments de $QSym^*$ définis par leur série génératrice dans $QSym^*[[t]]$, où t est une nouvelle variable centrale:

$$\sum_{i\geq 1} P_i^* t^i = \log(1 + M_1^* t + M_2^* t^2 + \ldots), \tag{4.19}$$

On veut montrer que

$$\Delta(P_n^*) = P_n^* \otimes 1 + 1 \otimes P_n^*. \tag{4.20}$$

En effet on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1} \Delta(P_i^*) t^i &= \Delta(\sum_{i\geq 1} P_i^* t^i) \\
&= \Delta(\log(1 + M_1^* t + M_2^* t^2 + \ldots)) \\
&= \log(1 + \Delta(M_1^*) t + \Delta(M_2^*) t^2 + \ldots) \\
&= \log(\sum_n \Delta(M_n^*) t^n) \\
\text{(par (4.18))} \qquad &= \log(\sum_{k,l} M_k^* t^k \otimes M_l^* t^l) \\
&= \log((\sum_k M_k^* t^k \otimes 1)(1 \otimes \sum_l M_l^* t^l)) \\
\text{(les facteurs commutent)} \qquad &= \log(\sum_k M_k^* t^k \otimes 1) + \log(1 \otimes \sum_l M_l^* t^l) \\
&= \log(\sum_k M_k^* t_k) \otimes 1 + 1 \otimes \log(\sum_l M_l^* t^l) \\
&= \sum P_i^* t^i \otimes 1 + 1 \otimes \sum P_i^* t^i \\
&= \sum (P_i^* \otimes 1 + 1 \otimes P_i^*) t^i,
\end{aligned}$$

ce qui démontre (4.20).

Pour trouver une expression explicite des P_i^*, en utilisant (4.17), on a

$$(M_1^* t + M_2^* t^2 + \ldots)^k = \sum_{\ell(C)=k} M_C^* t^{|C|}; \tag{4.21}$$

or

$$\log(1+x) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k},$$

donc si on développe (4.19) on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} P_n^* t^n &= \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)}{k}^{k-1}(M_1^* t + M_2^* t^2 + \ldots)^k \\ &= \sum_{C} \frac{(-1)}{\ell(C)}^{\ell(C)-1} M_C^* t^{|C|}\end{aligned}$$

et ceci implique

$$P_n^* = \sum_{|C|=n} \frac{(-1)^{\ell(C)-1}}{\ell(C)} M_C^*. \tag{4.22}$$

Cette égalité nous dit que les P_n^* sont des éléments homogènes de $QSym^*$. Calculons les premiers P_n^*:

$$\begin{aligned}P_1^* &= M_1^*,\\ P_2^* &= M_2^* - \tfrac{1}{2}(M_1^*)^2,\\ P_3^* &= M_3^* - \tfrac{1}{2}M_1^*M_2^* - \tfrac{1}{2}M_2^*M_1^* + \tfrac{1}{3}(M_1^*)^*.\end{aligned}$$

On voit bien que (4.22) est une relation algébrique triangulaire entre les P_n^* et les M_n^*, et, ces derniers étant des générateurs libres, les P_n^* aussi engendrent librement l'algèbre associative $QSym^*$. De la relation (4.20) il suit donc que l'application $P_i^* \mapsto t_i$ de $QSym^*$ à $K\langle T\rangle$ avec concaténation, est un isomorphisme d'algèbres de Hopf. $\square$

Corollaire 4.19 *En tant qu'algèbre commutative, QSym est libre: elle possède un ensemble de générateurs dont un sous-ensemble est* $\{p_n | n \geq 1\}$, *qui engendre librement Sym; donc QSym est aussi un module libre sur Sym.*

Dém. On a vu que $QSym^* = K\langle\{P_i\}\rangle$. Pour $C = (c_1, \ldots, c_k)$ soit $P_C^* = P_{c_1}^* \cdot P_{c_2}^* \cdot \ldots \cdot P_{c_k}^*$: l'ensemble $\{P_C^* | C \text{composition}\}$ est une base de $QSym^*$ comme espace vectoriel. Soit $\{P_C|C\text{composition}\} \subseteq QSym^{**} \simeq QSym$ la base duale des P_C^*, i.e. $\langle P_C^*, P_D\rangle = \delta_{DC}$. Une composition est un mot dans l'alphabet $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$: on peut donc parler de *compositions de Lyndon*. Si on dénote par L l'ensemble de compositions de Lyndon, par la Proposition 2.6 on a que l'ensemble $\{P_C|C \in L\}$ engendre librement $QSym$ en tant qu'algèbre.

Pour calculer les P_C, on obtient a partir de (4.19)

$$1 + M_1^* t + M_2^* t^2 + \ldots = \exp(\sum_{j\geq 1} P_j^* t^j) \tag{4.23}$$

d'où l'on déduit

$$M_n^* = \sum_{|C|=n} \frac{1}{\ell(C)!} P_C^*.$$

Si la composition C est plus fine que D, on peut écrire $C = C_1 C_2 \ldots C_r$ pour des compositions C_i telles que $D = (|C_1|, \ldots, |C_r|)$: on dénote dans ce cas $f(C, D) = \ell(C_1)! \ldots \ell(C_r)!$. En utilisant la relation (4.17), on a alors , pour toute composition D:

$$M_D^* = \sum_{C\geq D} \frac{1}{f(C, D)} P_C^*. \tag{4.24}$$

Par dualité (4.24) donne

$$P_C = \sum_{C\geq D} \frac{1}{f(C, D)} M_D. \tag{4.25}$$

En particulier, comme $C = (n)$ est la composition la moins fine et $f(C, C) = 1$, on a

$$P_n = M_n = p_n$$

et les $\{p_n\}$ engendrent librement Sym. □

Corollaire 4.20 *Avec le coproduit externe γ et le produit usuel, $QSym$ est une algèbre de Hopf, d'antipode S défini par*

$$S(M_C) = \sum_{C\geq D} (-1)^{\ell(C)} M_{D^\sim}, \tag{4.26}$$

ou de façon équivalente par

$$S(F_C) = (-1)^{|C|}\omega(F_C). \tag{4.27}$$

Dém. Dans le Théorème 4.18 on a prouvé que $QSym^*$ est une algèbre de Hopf: par dualité, il en suit que $QSym$ l'est aussi. Dénotons par S son antipode: il est l'adjoint de l'antipode S^* de $QSym^*$, qui est l'unique anti-automorphisme sur $QSym^*$ défini par $S^*(P_i^*) = -P_i^*$ (voir Proposition 2.4 et (2.9)). Alors:

$$\begin{array}{lrl} & \sum_{i\geq 0} S^*(M_i^*)t^i & = S^*(\sum_{i\geq 0} M_i^* t^i) \\ \text{(par (4.23))} & & = S^*(\exp(\sum_{j\geq 1} P_j^* t^j)) \\ & & = \exp(\sum_{j\geq 1} S^*(P_j^*)t^j) \\ & & = \exp(-\sum_{j\geq 1} P_j^* t^j) \\ \text{(encore (4.23))} & & = (\sum_{i\geq 0} M_i^* t^i)^{-1} \\ & & = \sum_{k\geq 0}(-1)^k(\sum_{i\geq 1} M_i^* t^i)^k \\ \text{(par (4.21))} & & = \sum_{C}(-1)^{\ell(C)} M_C^* t^{|C|}, \end{array}$$

donc

$$S^*(M_n) = \sum_{|C|=n}(-1)^{\ell(C)} M_C^*. \tag{4.28}$$

qui est équivalent à

$$S^*(M_n) = \sum_{|C|=n}(-1)^{\ell(C)} M_{C^\sim}^*. \tag{4.29}$$

Comme S^* est un anti-homomorphisme d'algèbres, on trouve pour $D = (d_1, \ldots, d_k)$:

$$\begin{aligned}
S^*(M_D^*) &= S^*(M_{d_k}^*) \ldots S^*(M_{d_1}^*) \\
\text{(par 4.29)} \qquad &= \left(\sum_{|C_k|=d_k} (-1)^{\ell(C_k)} M^*_{C_k^\sim} \right) \ldots \left(\sum_{|C_1|=d_1} (-1)^{\ell(C_1)} M^*_{C_1^\sim} \right) \\
\text{(par (4.17))} \qquad &= \sum_{\substack{C_k,\ldots,C_1 \\ |C_i|=d_i}} (-1)^{\ell(C_1)+\ldots+\ell(C_k)} M^*_{C_k^\sim \ldots C_1^\sim} \\
\text{(par (1.3))} \qquad &= \sum_{C \geq D} (-1)^{\ell(C)} M^*_{C^\sim}.
\end{aligned}$$

On voit facilement que $C \geq D$ si et seulement si $C^\sim \geq D^\sim$; on a vu aussi (Chapitre 1) que $\ell(C) = \ell(C^\sim)$; alors la dernière égalité peut se reécrire comme

$$\begin{aligned}
S^*(M^*_{D^\sim}) &= \sum_{C \geq D^\sim} (-1)^{\ell(C)} M^*_{C^\sim} \\
&= \sum_{C^\sim \geq D^\sim} (-1)^{\ell(C)} M^*_C \\
&= \sum_{C \geq D} (-1)^{\ell(C)} M^*_C.
\end{aligned}$$

L'antipode S^* est défini par dualité par la relation $\langle S^*(\phi), F \rangle = \langle \phi, S(F) \rangle$, pour $\phi \in QSym^*$, $F \in QSym$; par conséquence la dernière formule implique

$$\begin{aligned}
\langle S^*(M^*_{D^\sim}), M_C \rangle &= \langle M^*_{D^\sim}, S(M_C) \rangle \\
&= \sum_{C \geq D} (-1)^{\ell(C)},
\end{aligned}$$

et alors

$$S(M_C) = \sum_{C \geq D} (-1)^{\ell(C)} M_{D^\sim}.$$

Il reste à montrer la deuxième assertion. On a:

$$\begin{aligned}
S(F_C) &= \sum_{D \geq C} S(M_D) \\
&= \sum_{\substack{D \geq C \\ D \geq E}} (-1)^{\ell(D)} M_{E^\sim},
\end{aligned}$$

donc il suffit de montrer que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{D\geq C\\ D\geq E}}(-1)^{\ell(D)}M_{E^\sim} &= (-1)^{|C|}\omega(F_C) = (-1)^{|C|}F_{C'}\\ &= (-1)^{|C|}\sum_{F\geq C'}M_F.\end{aligned}$$

On rappelle que dans la bijection $C \longrightarrow Des(C)$ entre compositions de n et sous-ensembles de $[n-1]$, la longueur $\ell(C)$ devient $|Des(C)|+1$, que $Des(C') = [n-1]\setminus Des(C^\sim)$ (voir Proposition 1.9) et que $Des(C^\sim) = \{n-i|i\in Des(C)\}$ (voir Remarque 1.5). Par cette bijection, la dernière formule se traduit dans la suivante identité (dans le $\mathbf{Z}$-module libre sur les sous-ensembles de $[n-1]$):

$$\sum_{\substack{\delta\supseteq\gamma\\ \delta\supseteq\epsilon}}(-1)^{|\delta|+1}\epsilon^\sim = (-1)^n\sum_{\phi\supseteq[n-1]\setminus\gamma^\sim}\phi, \tag{4.30}$$

où $\gamma,\delta,\epsilon,\phi\subseteq[n-1]$ et on a posé $\epsilon^\sim = \{n-i|i\in\epsilon\}$. Or, $[n-1]\setminus\gamma^\sim = ([n-1]\setminus\gamma)^\sim$, donc (4.30) est équivalente à

$$\sum_{\substack{\delta\supseteq\gamma\\ \delta\supseteq\epsilon}}(-1)^{|\delta|+1}\epsilon^\sim = (-1)^n\sum_{\epsilon\supseteq[n-1]\setminus\gamma}\epsilon^\sim.$$

Il faut montrer que les coefficients de $\epsilon^\sim$ dans les deux membres de l'égalité sont égaux, i.e.

$$\sum_{\substack{\delta\supseteq\gamma\\ \delta\supseteq\epsilon}}(-1)^{|\delta|+1} = \begin{cases}(-1)^n & \text{si } \epsilon\supseteq[n-1]\setminus\gamma\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On note que $\epsilon\supseteq[n-1]\setminus\gamma$ si et seulement si $\epsilon\cup\gamma=[n-1]$ et que la condition $\delta\supseteq\epsilon$ et $\delta\supseteq\gamma$ est équivalente à la condition $\delta\supseteq\epsilon\cup\gamma$. Enfin, si $[n-1]=\epsilon\cup\gamma$, on a

$$\sum_{\substack{\delta\supseteq\gamma\\ \delta\supseteq\epsilon}}(-1)^{|\delta|+1} = \sum_{\delta\supseteq[n-1]}(-1)^{(n-1)+1} = (-1)^n;$$

si $[n-1]\neq\epsilon\cup\gamma$, on pose $\delta_1=\delta\setminus(\epsilon\cup\gamma)$ et on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\delta\supseteq\gamma\\ \delta\supseteq\epsilon}}(-1)^{|\delta|+1} &= \sum_{\delta_1\subseteq[n-1]\setminus(\epsilon\cup\gamma)}(-1)^{|\delta_1|+|\epsilon\cup\gamma|+1}\\ &= (-1)^{|\epsilon\cup\gamma|+1}\sum_{\delta_1\subseteq[n-1]\setminus(\epsilon\cup\gamma)}(-1)^{|\delta_1|} = 0\end{aligned}$$

où la dernière égalité est l'identité bien connue $\sum_{A \subseteq B} (-1)^{|A|} = 0$, si $B \neq \emptyset$. $\square$

On mentionne que Eherenborg dans [E] trouve indépendamment le résultat ci-dessus.

Remarque 4.21 Comme on a vu dans le Théorème 4.12, l'application ω étend la conjugaison usuelle des fonctions symétriques. En particulier, l'antipode qu'on avait défini sur l'algèbre des fonctions symétriques (voir Théorème 3.3) est bien la restriction à Sym de l' antipode S de $QSym$, et l'injection $i : Sym \hookrightarrow QSym$ est un morphisme d'algèbres de Hopf.

De (4.27) on déduit que pour tout $f \in QSym_n$ on a

$$S(f) = (-1)^n \omega(f).$$

Alors par (4.26) on a

$$\begin{aligned} \omega(M_C) &= (-1)^{|C|} S(M_C) \\ &= (-1)^{|C| - \ell(C)} \sum_{D \leq C} M_{D^\sim}. \end{aligned}$$

Or, pour toute composition C dont le réarrangement décroissant $\lambda(C)$ est la partition λ on a évidemment $|C| = |\lambda|$ et $\ell(C) = \ell(\lambda)$. On rappelle que (voir (4.1)) $m_\lambda = \sum_{\lambda(C)=\lambda} M_C$. Réprenons la base de Sym $\{f_\lambda\}$ qu'on avait défini au Chapitre 3 (3.13) par $f_\lambda = \omega(m_\lambda)$. On veut réécrire les $\{f_\lambda\}$ en terme des $\{m_\lambda\}$. On a:

$$\begin{aligned} f_\lambda &= \omega \left(\sum_{\lambda(C)=\lambda} M_C \right) \\ &= (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)} \sum_{\lambda(C)=\lambda} \sum_{D \leq C} M_{D^\sim} \\ \text{(car si } \lambda(C) = \lambda \text{ alors } \lambda(C^\sim) = \lambda \text{ aussi)} \qquad &= (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)} \sum_{\lambda(C)=\lambda} \sum_{D \leq C} M_D \\ &= (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)} \sum_{\lambda(C)=\lambda} \sum_{\mu \leq C} m_\mu. \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc un résultat de Doubilet [D] (Théorème 8 et son Corollaire).

Corollaire 4.22

$$f_\lambda = (-1)^{|\lambda|-\ell(\lambda)} \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} m_\mu,$$

avec $\alpha_{\lambda\mu} = |\{\mu \text{ partition} \mid \mu \leq C,\ \lambda(C) = \lambda\}| \geq 0$. *En particulier, les coefficients de* f_λ *ont tous le même signe.*

Par exemple, pour $\lambda = (3221)$, voici la liste de compositions C telles que $\lambda(C) = \lambda$:

$$\begin{array}{cccc} 3221 & 2321 & 2231 & 2213 \\ 3212 & 2312 & 2132 & 2123 \\ 3122 & 1322 & 1232 & 1223 \end{array}$$

On trouve

$$\begin{aligned} f_{3221} &= m_{3221} + 2m_{521} + 2m_{422} + 4m_{332} + m_{431} \\ &\quad +3m_{71} + 6m_{62} + 7m_{53} + 4m_{44} + 12m_6 \end{aligned}$$

4.4 Coproduit interne dans $QSym$

Soient X, Y deux ensembles infinis disjoints totalement ordonnés de variables commutatives. Sur l'ensemble produit

$$Z = XY = \{xy | x \in X, y \in Y\}$$

on définit l'ordre total suivant:

$$xy < x'y' \ \text{ si } x < x' \ \text{ ou bien } x = x' \text{ et } y < y'.$$

Si $F \in QSym$, on désigne par $F(xy)$ la fonction quasi-symétrique à valeurs dans Z. Dans [Ges], Theorème 11, Gessel donne la décomposition suivante pour les $F_C(xy)$.

Théorème 4.23 *Soit $\pi \in S_n$ une permutation, $C(\pi)$ la composition associée. Alors*

$$F_{C(\pi)}(xy) = \sum_{\tau\sigma=\pi} F_{C(\tau)}(y) F_{C(\sigma)}(x), \tag{4.31}$$

où $\tau\sigma$ désigne le produit de permutations dans S_n.

Comme les F_C forment une base de l'espace $QSym$, ce résultat implique que pour toute fonction quasi-symétrique G on peut écrire

$$G(xy) = \sum_i G_i(y) G'_i(x), \text{ avec } G_i(y) \in QSym(y), G'_i(x) \in QSym(x),$$

et la somme est finie: ceci nous permet de définir le *coproduit interne* γ':

$$\begin{array}{rccc} \gamma' : & QSym & \longrightarrow & QSym \otimes QSym \\ & G & \mapsto & \sum_i G_i \otimes G'_i \end{array}$$

Soit $\epsilon' : QSym \longrightarrow K$ l' application définie sur la base des $\{F_C\}$ par $\epsilon'(F_n) = 1, n \geq 0$, et $\epsilon'(F_C) = 0$ pour toute autre composition.

Proposition 4.24 *$QSym$ avec coproduit γ', co-unité ϵ', produit et unité usuels est une bigèbre.*

Dém. On a dejà vu que γ' est un homomorphisme d'algèbres. La co-unité aussi est un morphisme. En effet, si $C \models n$ et $D \models m$, soient u et v deux mots sans répétition sur $\{1, \ldots, n\}$ et $\{n+1, \ldots, n+m\}$ respectivement tels que $C(u) = C$ et $C(v) = D$. Pour le Corollaire 4.10 on a

$$\epsilon'(F_C F_D) = \sum_{w \in u \sqcup\!\sqcup v} \epsilon'(F_{C(w)}) : \tag{4.32}$$

il est clair donc que si $C = n$ et $D = m$ (i.e. $u = 12\ldots n$ et $v = n+1\ldots n+m$), le seul terme non nul dans la somme est $\epsilon'(F_{C(uv)}) = \epsilon'(F_{n+m}) = 1$, et

$$\epsilon'(F_n F_m) = \epsilon'(F_n)\epsilon'(F_m).$$

Si de plus $\ell(C)$ ou bien $\ell(D) \geq 1$, on aura, pour tout $w \in u \sqcup\!\sqcup v$, $\ell(C(w)) \geq 1$, et de (4.32) on déduit

$$\epsilon'(F_C F_D) = 0 = \epsilon'(F_C)\epsilon'(F_D).$$

Pour montrer que $QSym$ est une bigèbre, nous allons vérifier les relations (2.1) - (2.3) sur la base des $\{F_C\}$. Par le Théorème 4.23, si $|C| = n$, et $\pi \in S_n$ est une permutation telle que $C = C(\pi)$, on a:

$$\gamma'(F_C) = \sum_{\tau\sigma=\pi} F_{C(\tau)} \otimes F_{C(\sigma)}. \tag{4.33}$$

Alors

$$\begin{aligned}
(1 \otimes \gamma') \circ \gamma'(F_C) &= (1 \otimes \gamma')(\sum_{\tau\sigma=\pi} F_{C(\tau)} \otimes F_{C(\sigma)}) \\
&= \sum_{\tau\sigma=\pi} \sum_{\rho\nu=\sigma} F_{C(\tau)} \otimes (F_{C(\rho)} \otimes F_{C(\nu)}) \\
&= \sum_{\tau(\rho\nu)=\pi} (F_{C(\tau)} \otimes F_{C(\rho)}) \otimes F_{C(\nu)} \\
&= \sum_{\mu\nu=\pi} \gamma'(F_{C(\mu)}) \otimes F_{C(\nu)} \\
&= (\gamma' \otimes 1) \sum_{\mu\nu=\pi} F_{C(\mu)} \otimes F_{C(\nu)} \\
&= (\gamma' \otimes 1) \circ \gamma'(F_{C(\pi)});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 \otimes \epsilon') \circ \gamma'(F_C) &= (1 \otimes \epsilon')(\sum_{\tau\sigma=\pi} F_{C(\tau)} \otimes F_{C(\sigma)}) \\
&= \sum_{\tau\sigma=\pi} F_{C(\tau)} \otimes \epsilon'(F_{C(\sigma)}) \\
&= F_{C(\pi)} \otimes 1.
\end{aligned}$$

Analoguement, on a $(\epsilon' \otimes 1) \circ \gamma'(F_C) = 1 \otimes F_{C(\pi)}$. □

Corollaire 4.25 *La bigèbre Sym avec coproduit interne γ' est une sous-bigèbre de $QSym$.*

Dém. Par la Remarque 3.5, le coproduit γ' sur $QSym$ est défini de la même manière que sur l'algèbre Sym. De plus, il est à noter que $\epsilon'(F_n) = 1$ pour tout $n \geq 0$ et $\epsilon'(F_{(1)^n}) = 0$ pour tout $n \geq 2$. Puisque $F_n = \sum_{x_1 \leq \ldots \leq x_n} x_1 \ldots x_n = h_n$ et $F_{(1)^n} = \sum_{x_1 < \ldots < x_n} x_1 \ldots x_n = e_n$, la restriction à Sym de la co-unité ϵ' de $QSym$ coïncide avec la co-unité ϵ' de Sym qu'on avait défini dans le Chapitre 3 (voir (3.16) et (3.17)). □

On remarque que si $G \in QSym_n$, alors $\gamma'(G) \in QSym_n \otimes QSym_n$ est de degré $2n$, i.e. cette cogèbre n'est pas graduée.

De manière analogue à (4.16), on peut définir, sur la composante $QSym_n^*$ de degré n, une structure de bigèbre duale de la bigèbre $QSym_n$ avec coproduit interne (Proposition (4.24)): le produit $\phi \diamond \psi$ de $\phi, \psi \in QSym^*$ sera donné par

$$\langle \phi \diamond \psi, F \rangle = \langle \phi \otimes \psi, \gamma'(F) \rangle, \quad F \in QSym_n, \tag{4.34}$$

le coproduit $\Delta(\phi)$ étant le même que dans (4.16):

$$\langle \Delta(\phi), F \otimes G \rangle = \langle \phi, FG \rangle.$$

L'unité $u' : K \longrightarrow QSym_n^*$ pour le produit $\diamond$ est définie par

$$u'(1)(F_C) = \epsilon'(F_C) = \langle F_C, F_n^* \rangle,$$

donc

$$u'(1) = F_n^*, \tag{4.35}$$

où $\{F_C^*\}$ est la base duale de F_C. Nous reviendrons sur cette bigèbre au Théorème 5.17.

5 BIGÈBRES DES DESCENTES

Dans [Ges], Gessel montre que l'algèbre des descentes de Solomon Σ, avec le produit hérité de l' algèbre du groupe symétrique KS, est naturellement isomorphe à l' algèbre duale de la cogèbre $QSym$ avec coproduit interne γ'. Dans ce chapitre on définit sur KS un coproduit Δ, qui en fait une bigèbre, et un autre produit $\star$ tel que $(KS, \Delta, \star)$ est une algèbre de Hopf, dont Σ est une sous-algèbre. $QSym$ avec le produit usuel et le coproduit externe γ se trouve être le dual de cette dernière.

5.1 Définitions

Soit S_n le groupe symétrique sur n éléments, K un corps contenant $\mathbf{Q}$, KS_n l'algèbre du groupe S_n. Soit $KS = \oplus_{n \geq 0} KS_n$: cette espace a une structure d'algèbre quand on pose $\sigma \cdot \alpha = 0$ si σ et α ne sont pas dans le même groupe S_n. Remarquons que avec ce produit KS ne possède pas d'unité, tandis que la permutation identité est l' unité pour chaque algèbre KS_n. Nous identifierons souvent dans la suite une permutation σ avec le mot correspondant.

On va définir un nouveau produit sur KS. On a vu (Proposition 2.4) que si A est un ensemble infini totalement ordonné de variables non commutatives, l'algèbre de concaténation $K\langle A \rangle$ des polynômes non commutatifs dans A est une algèbre de Hopf avec coproduit, co-unité et antipode définis respectivement par

$$\delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a,$$
$$\epsilon(a) = 0,$$
$$\alpha(a) = -1,$$

pour tout $a \in A$. Le produit de convolution $\star$ défini sur $\mathrm{End}(K\langle A \rangle)$ par

$$f \star g = conc \circ (f \otimes g) \circ \delta, \tag{5.1}$$

où *conc* est le produit de concaténation, fait de $\mathrm{End}(K\langle A\rangle)$ une algèbre (voir (2.4)). Il existe une action à droite de KS sur $K\langle A\rangle$ donnée par

$$a_1 \ldots a_n.\sigma = a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)},$$

pour $\sigma \in S_n$ et $a_i \in A$. Ceci nous permet de considérer toute permutation σ comme un endomorphisme de $K\langle A\rangle$. Il sera commode de supposer $\{1, 2, 3, \ldots\} \subseteq A$. Ainsi KS s'identifie à une partie de $K\langle A\rangle$. De plus, pour $P \in KS_n$, on a $12 \ldots n.P = P$. En particulier KS s'identifie à un sous-espace de $K\langle A\rangle$. La convolution définit un produit sur KS: en effet on peut montrer, par la dualité de Weyl, que $\sigma \star \alpha \in KS$, si $\sigma, \alpha \in KS$. Nous l'établirons directement plus tard.

Pour un mot w de longueur n (sans ou avec repétitions) sur un alphabet totalement ordonné A, dénotons par $\mathrm{st}(w)$ la permutation de S_n définie par

$$\mathrm{st}(w)(i) < \mathrm{st}(w)(j) \Longleftrightarrow (a_i < a_j) \text{ ou bien } \ (a_i = a_j \text{ et } i < j), \tag{5.2}$$

où $w = a_1 \ldots a_n$. On appellera $\mathrm{st}(w)$ la *permutation* ou *mot standard de w*. Par exemple, pour $w = 322132621$, on a $\mathrm{st}(w) = 734185962$. En effet on obtient $\mathrm{st}(w)$ par rénumérotation des lettres de w avec les entiers de 1 à n, en partant de la plus petite lettre de w (dans l'ordre alphabetique) de gauche à droite. On remarque que s'il n'y a pas de repétitions de lettres dans $w = a_1 \ldots a_n$, alors $\mathrm{st}(w)$ est le mot qu'on obtient en appliquant à w l' unique bijection croissante $\{a_1, \ldots, a_n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$. On peut étendre l'opérateur st par linéarité à tout polynôme de $K\langle A\rangle$.

Remarque 5.1 Il est clair que le mot standard d' une permutation σ est le même σ; en particulier, $\mathrm{st} \circ \mathrm{st} = \mathrm{st}$. De plus, soit $w = a_1 \ldots a_n$, $I = \{i_1 < \ldots < i_r\} \subseteq [n]$ et $w|_I = a_{i_1} \ldots a_{i_r}$ un sous-mot de w. Alors on voit facilement que

$$\mathrm{st}(w|_I) = \mathrm{st}(\mathrm{st}(w)|_I). \tag{5.3}$$

Pour $w \in A^*$ soit $\mathrm{alph}(w) \subseteq A$ l'ensemble des lettres qui apparaissent dans w.

Lemme 5.2 *Le produit de convolution $\star$ résulte être $\sigma \star \alpha = \sum uv$, pour $\sigma \in S_n$, $\alpha \in S_p$, où l' on somme sur u, v tels que* $\mathrm{alph}(u) \cup \mathrm{alph}(v) = \{1, 2, \ldots, n+p\}$, $\mathrm{st}(u) = \sigma$, $\mathrm{st}(v) = \alpha$.

Dém. On a $\delta(12 \ldots n+p) = \sum u \otimes v$, où on somme sur les mots $u, v \in A^\star$ croissants tels que $\mathrm{alph}(u) \cup \mathrm{alph}(v) = [n+p]$. On rappelle que si $\pi \in S_m$ et $|u| \neq m$, on a $\pi(u) = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \sigma \star \alpha &= 12 \ldots n+p.\sigma \star \alpha \\ &= conc \circ (\sigma \otimes \alpha)\delta(12 \ldots n+p) \\ &= \sum u_{\sigma_1} \ldots u_{\sigma_n} v_{\alpha_1} \ldots v_{\alpha_p}, \end{aligned}$$

avec $u_h < u_{h+1}$ et $v_h < v_{h+1}$, donc évidemment $\mathrm{st}(u_{\sigma_1} \ldots u_{\sigma_n}) = \sigma$ et $\mathrm{st}(v_{\alpha_1} \ldots v_{\alpha_p}) = \alpha$. $\square$

Si $\sigma \in S_n$ et $I \subseteq [n]$, on indique avec $\sigma|I$ le sous-mot de σ qu'on obtient en ne lisant dans σ que les lettres qui sont dans I. Pour $\sigma = 734185962$ et $I = \{1, 3, 5, 8\}$ on aura $\sigma|I = 3185$. Attention: le sous-mot $\sigma|I$ est different du sous-mot $\sigma|_I = \sigma(1)\sigma(3)\sigma(5)\sigma(8) = 7486$.
On définit maintenant un coproduit Δ sur KS sur la base $\{\sigma | \sigma \in S_n\}$ de chaque composante KS_n:

$$\Delta(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} \sigma|\{1, \ldots, i\} \otimes \mathrm{st}(\sigma|\{i+1, \ldots, n\}). \tag{5.4}$$

Par exemple, pour $\sigma = 3124$, on aura $\Delta(\sigma) = \lambda \otimes \mathrm{st}(3124) + 1 \otimes \mathrm{st}(324) + 12 \otimes \mathrm{st}(34) + 312 \otimes \mathrm{st}(4) + 3124 \otimes \lambda = \lambda \otimes 3124 + 1 \otimes 213 + 12 \otimes 12 + 312 \otimes 1 + 3124 \otimes \lambda$, où λ est l'identité dans S_0 (i.e. le mot vide).

5.2 Structures de bigèbres sur KS

Soient $\epsilon : KS \longrightarrow K$ et $u : K \longrightarrow KS$ les applications linéaires définies respectivement par $\epsilon(\lambda) = 1$ et $\epsilon(\sigma) = 0$ si $\sigma \in S_n$, $n \geq 1$, $u(1) = \lambda$.

Théorème 5.3 *Avec produit $\star$, unité u, coproduit Δ et co-unité ϵ, KS est une algèbre de Hopf.*

On rappelle qu' on a mis sur $K\langle A\rangle$ une autre structure de algèbre de Hopf, avec le produit du mélange et le coproduit

$$\delta'(w) = \sum_{uv=w} u \otimes v,$$

et on a vu que, par rapport au produit scalaire $\langle u, v\rangle = \delta_{uv}$, où $u, v \in A^\star$, cette dernière est duale de l'algèbre de Hopf de concaténation. Nous dénoterons par $\star'$ la convolution correspondante à δ' dans $\mathrm{End}(K\langle A\rangle)$, c'est-à-dire

$$f \star' g = sh \circ (f \otimes g) \circ \delta', \tag{5.5}$$

où on rappelle que $sh : K\langle A\rangle \otimes K\langle A\rangle \longrightarrow K\langle A\rangle$ est le produit du mélange $u \otimes v \mapsto u \sqcup\!\sqcup v$. Cette convolution $\star'$ nous donne un nouveau produit sur KS (voir le Lemme 5.7).

Soit $\Delta' : KS \longrightarrow KS \otimes KS$ le coproduit défini par

$$\Delta' = (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \circ \delta'. \tag{5.6}$$

Théorème 5.4 *Avec produit $\star'$, coproduit Δ', unité u et co-unité ϵ, KS est une algèbre de Hopf.*

Soit $\theta : KS \longrightarrow KS$ l'opérateur linéaire défini par $\theta(\sigma) = \sigma^{-1}$, pour $\sigma \in S_n$. On verra plus loin qu'en conjugant cette structure d'algèbre de Hopf par θ, on obtient le produit $\star$ et le coproduit Δ, ce qui prouvera le Théorème 5.3. Nous avons besoin d'abord de quelques lemmes techniques.

Lemme 5.5 *Soit $\sigma \in S_n$, $\alpha \in S_p$ et soit $\overline{\alpha}$ le mot dans $\{n+1, \dots, n+p\}$ qu'on obtient en remplaçant chaque i du mot α par $n+i$. Alors on a*

$$\sigma \star' \alpha = \sigma \sqcup\!\sqcup \overline{\alpha}. \tag{5.7}$$

Dém. On rappelle que si $\pi \in S_m$, alors $w.\pi = 0$ si la longueur de w n'est pas m. Si on fait agir l'endomorphisme $(\sigma \star' \alpha)$ sur le mot $12 \dots n+p$ on obtient:

$$\begin{aligned}
\sigma \star' \alpha(12 \dots n+p) &= sh \circ (\sigma \otimes \alpha) \left(\sum_{uv = 12 \dots n+p} u \otimes v \right) \\
&= sh(12 \dots n.\sigma \otimes n+1 \dots n+p.\alpha) \\
&= sh(\sigma(1) \dots \sigma(n) \otimes n+\alpha(1) \dots n+\alpha(p)) \\
&= \sigma \sqcup\!\sqcup \overline{\alpha}. \quad \square
\end{aligned}$$

Lemme 5.6 *Soient u, v des mots tels que chaque lettre de u est plus petite que chaque lettre de v. Alors*

$$\mathrm{st}(u) \star' \mathrm{st}(v) = \mathrm{st}(u \sqcup\!\sqcup v). \tag{5.8}$$

Dém. Si $\overline{\mathrm{st}(v)}$ est le mot qu'on obtient en remplaçant chauqe i du mot $\mathrm{st}(v)$ par $i+|u|$, il est clair qu'avec les hypothèses on a $\mathrm{st}(uv) = \mathrm{st}(u)\overline{\mathrm{st}(v)}$ et aussi $\mathrm{st}(u \sqcup\!\sqcup v) = \mathrm{st}(u) \sqcup\!\sqcup \overline{\mathrm{st}(v)}$: ce dernier est égal à $\mathrm{st}(u) \star' \mathrm{st}(v)$ par (5.7). $\square$

Le coproduit $\Delta' = (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \circ \delta'$ de KS s'étend à une application linéaire $K\langle A \rangle \longrightarrow KS \otimes KS$, car $\delta' : K\langle A \rangle \longrightarrow K\langle A \rangle \otimes K\langle A \rangle$.

Lemme 5.7

$$\Delta' = \Delta' \circ \mathrm{st}. \tag{5.9}$$

Dém. Soit $w = a_1 \dots a_n$ et $\mathrm{st}(w) = b_1 \dots b_n$ le standardisé de w. Alors, par (5.3) on a

$$\mathrm{st}(a_1 \dots a_i) \otimes \mathrm{st}(a_{i+1} \dots a_n) = \mathrm{st}(b_1 \dots b_i) \otimes \mathrm{st}(b_{i+1} \dots b_n).$$

On en déduit:

$$\begin{aligned}
\Delta'(w) &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{st}(a_1 \dots a_i) \otimes \mathrm{st}(a_{i+1} \dots a_n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{st}(b_1 \dots b_i) \otimes \mathrm{st}(b_{i+1} \dots b_n) \\
&= \Delta'(\mathrm{st}(w)) = \Delta' \circ \mathrm{st}(w). \quad \square
\end{aligned}$$

Dém. du Théorème 5.4 Le coproduit Δ' est coassociatif: pour tout $\sigma \in S_n$, on a

$$\begin{aligned}
(\Delta' \otimes 1) \circ \Delta'(\sigma) &= (\Delta' \otimes 1) \left(\sum_{uv=\sigma} \mathrm{st}(u) \otimes \mathrm{st}(v) \right) \\
&= \sum_{uv=\sigma} (\Delta' \circ \mathrm{st}(u)) \otimes \mathrm{st}(v) \\
\text{(par (5.9))} \qquad &= \sum_{(xy)v=\sigma} \mathrm{st}(x) \otimes \mathrm{st}(y) \otimes \mathrm{st}(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{xt=\sigma} \mathrm{st}(x) \otimes \left(\sum_{yv=t} \mathrm{st}(y) \otimes \mathrm{st}(v) \right) \\
\text{(encore par (5.9))} \qquad &= \sum_{xt=\sigma} \mathrm{st}(x) \otimes \Delta' \circ \mathrm{st}(t) \\
&= (1 \otimes \Delta') \left(\sum_{xt=\sigma} \mathrm{st}(x) \otimes \mathrm{st}(t) \right) \\
&= (1 \otimes \Delta') \circ \Delta'(\sigma).
\end{aligned}$$

De plus, ϵ est bien la co-unité, car on a

$$(1 \otimes \epsilon) \circ \Delta'(\sigma) = (1 \otimes \epsilon) \left(\sum_{uv=\sigma} \mathrm{st}(u) \otimes \mathrm{st}(v) \right) = \mathrm{st}(\sigma) \otimes 1 = \sigma \otimes 1,$$

et de manière analogue $(\epsilon \otimes 1) \circ \Delta'(\sigma) = 1 \otimes \sigma$.

Il est clair que ϵ est un morphisme pour le produit $\star'$, puisque ce dernier respecte la graduation de KS et que $\epsilon(KS) \subseteq KS_0 = K$. On va montrer que le coproduit Δ'

aussi est un morphisme pour la convolution $\star'$. En effet:

$$\begin{aligned}
&\text{(par (5.7))} & \Delta'(\sigma \star' \alpha) &= \Delta'(\sigma \sqcup\!\sqcup \overline{\alpha}) \\
& & &= (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st})(\delta'(\sigma \sqcup\!\sqcup \overline{\alpha})) \\
&(\delta'\text{est un morphisme pour } \sqcup\!\sqcup) & &= (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st})(\delta'(\sigma) \sqcup\!\sqcup \delta'(\overline{\alpha})) \\
& & &= (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \sum_{\substack{uv=\sigma \\ xy=\overline{\alpha}}} (u \sqcup\!\sqcup x) \otimes (v \sqcup\!\sqcup y) \\
& & &= \textstyle\sum \mathrm{st}(u \sqcup\!\sqcup x) \otimes \mathrm{st}(v \sqcup\!\sqcup y) \\
&\text{(par (5.8))} & &= \textstyle\sum (\mathrm{st}(u) \star' \mathrm{st}(x)) \otimes (\mathrm{st}(v) \star' \mathrm{st}(y)) \\
& & &= \textstyle\sum (\mathrm{st}(u) \otimes \mathrm{st}(v)) \star' (\mathrm{st}(x) \otimes \mathrm{st}(y)) \\
& & &= [(\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \sum_{uv=\sigma} u \otimes v] \star' [(\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \sum_{xy=\overline{\alpha}} x \otimes y] \\
& & &= [(\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \circ \delta'(\sigma)] \star' [(\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \circ \Delta'(\overline{\alpha})] \\
&\text{(par (5.9))} & &= \Delta'(\sigma) \star' [(\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \circ \Delta'(\mathrm{st}(\overline{\alpha}))] \\
& & &= \Delta'(\sigma) \star' \Delta'(\alpha).
\end{aligned}$$

On a montré donc que KS est une bigèbre: comme elle est graduée, et que $KS_0 = K$, KS est une algèbre de Hopf (voir Proposition 2.2). $\square$

Les considérations un peu techniques qui suivent servent à établir le Corollaire 5.11, essentiel pour la preuve du Théorème 5.3.

Soient A et B deux alphabets totalement ordonnés. Un *bi-mot* est un mot dans l'alphabet $C = A \times B$. Si $u = a_1 \dots a_n \in A^\star$, $v = b_1 \dots b_n \in B^\star$, on écrira $w = w(u, v)$ si $w = (a_1, b_1) \dots (a_n, b_n)$. On peut aussi représenter le bi-mot $w(u, v)$ en superposant u et v :

$$w(u, v) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ b_1 b_2 \dots b_n \end{pmatrix}$$

un *bi-mot* est *croissant* si, quand $i < j$, on a $(a_i, b_i) < (a_j, b_j)$ (où $<$ est l'ordre lexicographique sur $A \times B$). On remarque que w est croissant si et seulement si la permutation standard associée $\mathrm{st}(w)$ est l'identité. Voici un exemple de bi-mot croissant:

$$w = \begin{pmatrix} 112333 \\ 236113 \end{pmatrix}.$$

Si $A = B$, le *bi-mot transposé* de $w(u, v)$, noté par w^t, est le bi-mot $w(v, u)$.

Lemme 5.8 *Soit $w = w(u, v)$ un bi-mot croissant, et $\sigma = (\mathrm{st} v)^{-1}$. Alors le bi-mot*

$$w^t.\sigma = \begin{pmatrix} b_{\sigma(1)} \dots b_{\sigma(n)} \\ a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

est croissant.

Dém. Remarquons d'abord que, comme $\mathrm{st}(w) = id$, on a $a_i \leq a_j$ si $i < j$. Or:

$$\mathrm{st} v(i) < \mathrm{st} v(j) \Longrightarrow (b_i < b_j) \text{ ou } (b_i = b_j \text{ et } i < j)$$

donc

$$\mathrm{st} v(i) < \mathrm{st} v(j) \Longrightarrow (b_i < b_j) \text{ ou } (b_i = b_j \text{ et } a_i \leq a_j).$$

On en tire

$$\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) \Longrightarrow (b_i, a_i) < (b_j, a_j)$$

puis

$$i < j \Longrightarrow (b_{\sigma(i)}, a_{\sigma(i)}) < (b_{\sigma(j)}, a_{\sigma(j)}.$$

Ceci montre que $w^t.\sigma$ est croissant. $\square$

Lemme 5.9 *Soit $u = a_1 \dots a_n \in A^*$, $v = b_1 \dots b_n \in B^\star$ et $w = w(u, v)$. Alors* $\mathrm{st}(w) = \mathrm{st}(u.\mathrm{st}(v)^{-1})\mathrm{st}(v)$.

Ce Lemme se trouve dans [Reu] (Lemma 9.40), et il est équivalent au Théorème 9 de Gessel dans [Ges]; voir aussi Gordon [Gor] et Garsia-Gessel [GG].

Proposition 5.10 *Soit $w = w(u, v)$ croissant, et $w' = w(u', v')$ le bi-mot croissant associé à w^t. Alors* $\mathrm{st}(v') \cdot \mathrm{st}(v) = id$.

Dém. Par le Lemme 5.8 on a que $v' = u.\mathrm{st}(v)^{-1}$. Le Lemme 5.9 se traduit donc dans l'égalité voulue:

$$id = \mathrm{st}(w) = \mathrm{st}(v') \cdot \mathrm{st}(v). \quad \square$$

Par cette Proposition on généralise la procédure qu'on utilise pour écrire l'inverse d'une permutation donnée

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix};$$

σ^{-1} est la permutation qu'on obtient en réarrangeant de façon croissante le bi-mot

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Corollaire 5.11 *Si $I = \{i_1 < \ldots < i_k\} \subseteq [n]$ et $\sigma \in S_n$, alors*

$$\theta(\mathrm{st}(\sigma|I)) = \mathrm{st}(\sigma^{-1}(i_1) \ldots \sigma^{-1}(i_k)) = \mathrm{st}(\theta(\sigma)|_I). \tag{5.10}$$

Dém. On applique la Proposition précedente au bi-mot (dans l'alphabet $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$)

$$w(u, v) = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ \sigma^{-1}(i_1) & \dots & \sigma^{-1}(i_k) \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on observe que dans le bi-mot croissant $w(u', v')$ associé à

$$w^t = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(i_1) & \dots & \sigma^{-1}(i_k) \\ i_1 & \dots & i_k \end{pmatrix},$$

on a $v' = \sigma|I$: il en suit que $\mathrm{st}(\sigma|I) \cdot \mathrm{st}(\sigma^{-1}|_I) = id$, i.e. $\theta(\mathrm{st}(\sigma|I)) = \mathrm{st}(\theta(\sigma)|_I)$. $\square$

Dém. du Théorème 5.3 Il suffit de montrer que

$$\sigma \star \alpha = \theta(\theta(\sigma) \star' \theta(\alpha)) \tag{5.11}$$

et que

$$\Delta(\sigma) = (\theta \otimes \theta) \circ \Delta' \circ \theta(\sigma) : \tag{5.12}$$

ainsi le produit $\star$ et le coproduit Δ s'obtiennent de $\star'$ et Δ' en conjuguant par θ, donc $(KS, \star, \Delta, u, \epsilon)$ est une algèbre de Hopf, d'après le Théorème 5.4. Pour la première identité, on observe que, par rapport au produit scalaire $\langle u, v\rangle = \delta_{uv}$ de $K\langle A\rangle$, l'adjoint de l' endomorphisme $P \mapsto P.\sigma$ correspondant à la permutation σ est l'endomorphisme $P \mapsto P.\sigma^{-1}$: on peut dire que dans KS (vu comme sous-espace de $\mathrm{End}(K\langle A\rangle)$, l'adjoint de x est $\theta(x)$. Or, on a vu (voir Proposition 2.5) que les structures des algèbres de Hopf de la concaténation et du mélange sont duales. Or, dans $\mathrm{End}(K\langle A\rangle)$, l'adjoint de $f \star g = conc \circ (f \otimes g) \circ \delta$ est $sh \circ (f' \otimes g') \circ \delta' = f' \star' g'$, où f' et g' sont les adjoints de f et de g. Notamment, dans KS l'adjoint de $\sigma \star \alpha$ est $\theta(\sigma) \star' \theta(\alpha)$ (voir [Reu], (1.5.9)), ce qui prouve la première identité.
Ensuite, on a :

$$\begin{array}{lll} & (\theta \otimes \theta) \circ \Delta(\sigma) & = (\theta \otimes \theta) \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (\sigma|\{1, \ldots, i\}) \otimes \mathrm{st}(\sigma|\{i+1, \ldots, n\}) \\ \text{(par (5.10))} & & = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathrm{st}(\sigma^{-1}(1) \ldots \sigma^{-1}(i)) \otimes \mathrm{st}(\sigma^{-1}(i+1) \ldots \sigma^{-1}(n)) \\ & & = (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st})(\displaystyle\sum_{uv=\sigma^{-1}} u \otimes v) \\ & & = (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \circ \delta'(\sigma^{-1}) = \Delta' \circ \theta(\sigma). \end{array}$$

La deuxième identité découle de ce calcul, quand on observe que $\theta \circ \theta = id$. $\square$

On aimerait trouver une forme close pour l'antipode de KS avec le produit $\star$, appellons-le $T : KS \longrightarrow KS$. A la lumière du résultat dans la suite, où l'on décrit explicitement l'antipode T sur l'algèbre des descentes Σ avec le produit $\star$ (voir (5.20)), on est amené à penser que $T(w) = (-1)^{|w|} w^{\sim}$. En fait, ceci ne s'avère pas vrai, comme l'on voit des calculs suivants.

Soit $T' : KS \longrightarrow KS$ l'antipode de KS avec le produit $\star'$. On peut le calculer sur chaque groupe S_n par récurrence, comme l'indique la démonstration de la Proposition 2.2. Dénotons par $\mu_{\star'}$ la multiplication $\mu_{\star'} : KS \otimes KS \longrightarrow KS : \sigma \otimes \alpha \mapsto \sigma \star' \alpha$. Alors on doit avoir $\mu_{\star'} \circ (T' \otimes id) \circ \Delta'(\lambda) = 1$, et aussi $\mu_{\star'} \circ (T' \otimes id) \circ \Delta'(\sigma) = 0$ (c'est la relation (2.6)), pour tout $\sigma \in S_n$, $n \geq 1$, c'est-à-dire

$$\sum_{uv=\sigma} T'(\mathrm{st}(u)) \star' \mathrm{st}(v) = 0.$$

Enfin, pour calculer $T'(\sigma)$, on utilisera la dernière égalité, avec la relation (5.7), qui donne le produit $\star'$ en termes de produit du mélange: $\sigma \star' \alpha = \sigma \sqcup\!\sqcup \overline{\alpha}$. On obtient:

$$\begin{aligned}
&T'(\lambda) = \lambda \\
&T'(1) = -1 \\
&T'(12) = 21 \\
&T'(21) = 12 \\
&T'(123) = -321 \\
&T'(321) = -123 \\
&T'(132) = -231 - 213 + 312 \\
&T'(213) = -312 - 132 + 231 \\
&T'(231) = -2 \cdot 231 - 213 + 132 + 312 \\
&T'(312) = -2 \cdot 312 - 132 + 213 + 231 \\
&T'(1234) = -4321 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

En guise d'exemple, faisons le calcul de $T'(312)$, en prenant pour aquis la valeur de T' sur les permutations de longueur ≤ 2. D'abord, on a:

$$\begin{aligned}\Delta'(312) &= (\mathrm{st}\otimes\mathrm{st})(312\otimes\lambda+31\otimes 2+3\otimes 12+\lambda\otimes 312)\\ &= 312\otimes\lambda+21\otimes 1+1\otimes 12+\lambda\otimes 312.\end{aligned}$$

Ensuite on applique $\mu_{\star'}\circ(T'\otimes id)$ pour obtenir

$$T'(312)\star'\lambda+T'(21)\star' 1+T'(1)\star' 12+T'(\lambda)\star' 312=0$$

et par (5.7) et la récurrence on a $T'(312)+12\sqcup\!\sqcup\, 3-1\sqcup\!\sqcup\, 23+312=0$, d'où $T'(312)=-123-132-312+123+213+231-312=-2\cdot 312132+213+231.$
Si maintenant on veut connaître la valeur de T sur les mêmes permutations, on n'a qu'à conjuguer par θ:

$$T(\sigma)=\theta\circ T'\circ\theta(\sigma). \tag{5.13}$$

Alors

$$\begin{aligned}&T(\lambda)=\lambda\\ &T(1)=-1\\ &T(12)=21\\ &T(21)=12\\ &T(123)=-321\\ &T(321)=-123\\ &T(132)=-312-213+231\\ &T(213)=-231-132+312\\ &T(231)=-2\cdot 231-132+213+312\\ &T(312)=-2\cdot 312-213+132+231\\ &T(1234)=-4321\\ &\vdots\end{aligned}$$

Proposition 5.12 *Les deux structures d'algèbre de Hopf* $(KS, \star, \Delta)$ *et* $(KS, \star', \Delta')$ *sont duales entre elles.*

Dém. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire de KS tel que $\cup_n S_n$ soit une base orthonormale. Alors

$$\langle \sigma \star' \alpha, \tau \rangle = \langle \sigma \otimes \alpha, \Delta(\tau) \rangle.$$

En effet, pour l'établir, on peut supposer que $\sigma \in S_n$ et $\alpha \in S_p$, et $\tau \in S_{n+p}$. On a alors:

$$\begin{array}{lrl}
\text{(par (5.7))} & & \langle \sigma \star' \alpha, \tau \rangle = \langle \sigma \sqcup\!\sqcup \overline{\alpha}, \tau \rangle = 1 \\
\text{(déf. de } \sqcup\!\sqcup) & \iff & \exists\ I \cup J = [n+p], \text{et } \tau|_I = \sigma, \tau|_J = \overline{\alpha} = n+\alpha(1)\dots n+\alpha(p) \\
& \iff & \tau|\{1\dots n\} = \sigma \text{ et } \tau|\{n+1\dots n+p\} = \overline{\alpha} \\
& \iff & \tau|\{1\dots n\} = \sigma \text{ et } \mathrm{st}(\tau|\{n+1\dots n+p\}) = \mathrm{st}(\overline{\alpha}) = \alpha \\
& \iff & \langle \sigma, \tau|\{1\dots n\} \rangle \cdot \langle \alpha, \mathrm{st}(\tau|\{n+1\dots n+p\}) \rangle = 1 \\
(\langle S_m, S_l \rangle = 0 \text{ si } m \neq l) & \iff & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \langle \sigma, \tau|\{1\dots i\} \rangle \cdot \langle \alpha, \mathrm{st}(\tau|\{i+1\dots n+p\}) \rangle = 1 \\
& \iff & \langle \sigma \otimes \alpha, \Delta(\tau) \rangle = 1.
\end{array}$$

Pour l'égalité $\langle \sigma \star \alpha, \tau \rangle = \langle \sigma \otimes \alpha, \Delta'(\tau) \rangle$, on utilise le Lemme 5.2:

$$\begin{aligned}
\langle \sigma \star \alpha, \tau \rangle &= \sum_{\substack{\mathrm{st}(u)=\sigma \\ \mathrm{st}(v)=\alpha}} \langle uv, \tau \rangle \\
&= \sum_{uv=\tau} \langle \sigma, \mathrm{st}(u) \rangle \langle \alpha, \mathrm{st}(v) \rangle \\
&= \langle \sigma \otimes \alpha, (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \circ \delta'(\tau) \rangle = \langle \sigma \otimes \alpha, \Delta'(\tau) \rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

5.3 Dualité entre Σ et $QSym$

Soit I un sous-ensemble de $[n-1]$ fixé: on dénote par D_I l'élément de KS_n qui représente la classe des permutations qui ont même ensemble de descentes I:

$$D_I = \sum_{Des(\sigma)=I} \sigma.$$

Pour compatibilité des notations, si $C = \mathcal{C}(I)$ est la composition associée au sous-ensemble I, i.e. $Des(C) = I$ (voit (1.1), on écrira D_C plutôt que D_I. En particulier, il en résulte $D_n = D_\emptyset = 12\dots n$. Soit H une pseudo-composition telle que la composition $C(H)$ qu'on obtient en supprimant de H les zéros est égale à une composition C. Il est clair que pour la pseudo-composition $H = (h_1, \dots, h_n)$ on a $Des(H) := \{h_1, h_1+h_2, \dots h_1+\dots+h_r\} = Des(C(H)) = Des(C)$, alors pour simplifier les notation dans la suite, on écrira indifféremment D_H ou D_C. Soit Σ_n l'espace engendré par les $\{D_C\}_{C \models n}$, et $\Sigma = \oplus_{n \geq 0} K\Sigma_n$.

Théorème 5.13 *Σ est une sous-algèbre de Hopf de $(KS, \star, \Delta)$.*

Dém. Si l'on conjugue par θ, ceci est équivalent à montrer que l' espace $\Sigma' = \theta(\Sigma)$ est une sous-algèbre de Hopf de $(KS, \star', \Delta')$. On définit des nouveaux éléments de Σ: pour une composition C, soit

$$D_{\leq C} = \sum_{E \leq C} D_E = \sum_{Des(\sigma) \subseteq Des(C)} \sigma. \tag{5.14}$$

On a $D_{\leq n} = D_n = 12\dots n$. Dans [GRem], Garsia et Remmel montrent que

$$\theta(D_{\leq C}) = u_1 \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup u_k, \tag{5.15}$$

où $u_1 \dots u_k = 12\dots n$, et $|u_i| = c_i$, avec $C = (c_1, \dots, c_k)$. Puisque les éléments $\{D_C\}$ engendrent Σ et que la relation (5.14) entre les $\{D_{\leq C}\}$ et les $\{D_C\}$ est triangulaire, les éléments $\{\theta(D_{\leq C})\}$ engendrent Σ'.

Soit $E = (e_1, \dots, e_l)$ une autre composition, donc $\theta(D_{\leq E}) = v_1 \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup v_l$, avec $v_1 \dots v_l = 12\dots m$, $|v_i| = e_i$ et $|E| = m$. Alors, par la propriété (5.7) du produit $\star'$ et par (5.15), on obtient:

$$\theta(D_{\leq C}) \star' \theta(D_{\leq E}) = w_1 \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup w_{k+l},$$

avec $w_1 \dots w_{k+l} = 12 \dots n{+}m$, $|w_i| = c_i$ pour $i \le k$ et $|w_i| = e_i$ pour $i > k$, c'est-à-dire

$$\theta(D_{\le C}) \star' \theta(D_{\le E}) = \theta(D_{\le CE}), \tag{5.16}$$

où CE est la concaténation des compositions C et E. Cette identité montre que l'espace Σ' est fermé pour le produit $\star'$. Pour le coproduit, on a $\Delta'(\Sigma') \subseteq \Sigma' \otimes \Sigma'$. En effet:

$$\begin{aligned}
\Delta'(\theta(D_{\le C})) \quad & = (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \circ \delta'((u_1 \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup u_k)) \\
\text{(δ' morphisme pour $\sqcup\!\sqcup$)} \quad & = (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st})(\delta'(u_1) \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup \delta'(u_k)) \\
& = (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \left(\sum_{x_i y_i = u_i} (x_1 \otimes y_1) \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup (x_k \otimes y_k) \right) \\
& = (\mathrm{st} \otimes \mathrm{st}) \textstyle\sum (x_1 \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup x_k) \otimes (y_1 \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup y_k) \\
& = \textstyle\sum \mathrm{st}(x_1 \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup x_k) \otimes \mathrm{st}(y_1 \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup y_k) \\
\text{(car $x_i y_i = u_i$ et $u_1 \dots u_k = 12 \dots n$)} \quad & = \sum_{\substack{a_1 \dots a_k = 12 \dots l \\ b_1 \dots b_k = 12 \dots n-l \\ |a_i| + |b_i| = |u_i|}} (a_1 \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup a_k) \otimes (b_1 \sqcup\!\sqcup \dots \sqcup\!\sqcup b_k) \\
& = \sum_{C', C''} \theta(D_{\le C'}) \otimes \theta(D_{\le C''}),
\end{aligned}$$

où la dernière somme s'étend aux pseudo-compositions $C' = (c'_1, \dots, c'_k)$ et $C'' = (c''_1, \dots, c''_k)$ avec $c_i = c'_i + c''_i$, i.e. telles que $C' + C'' = C$. Les calculs précédents, avec les relations (5.11) et (5.12) montrent que, dans Σ, on a :

$$D_{\le C} \star D_{\le E} = D_{\le CE} \tag{5.17}$$

et que, avec les notations ci-dessus pour C' et C'',

$$\Delta(D_{\le C}) = \sum_{C' + C'' = C} D_{\le C'} \otimes D_{\le C''}. \ \square \tag{5.18}$$

Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le p}}$ une matrice d'entiers naturels. La *somme des colonnes* de M est la pseudo-composition

$c(M) = (m_{11} + m_{21} + \dots + m_{k1}, m_{12} + m_{22} + \dots + m_{k2}, \dots, m_{1p} + m_{2p} + \dots + m_{kp}),$

la *somme des lignes* est la pseudo-composition

$$l(M) = (m_{11} + m_{12} + \ldots + m_{1p}, m_{21} + m_{22} + \ldots + m_{2p}, \ldots, m_{k1} + m_{k2} + \ldots + m_{kp}).$$

Aussi, on obtient une pseudo-composition $w(M)$ en lisant les entiers dans M ligne par ligne:

$$w(M) = (m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{1p}, m_{21}, m_{22}, \ldots, m_{2p}, \ldots, m_{k1}, m_{k2}, \ldots, m_{kp}).$$

Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, alors $c(M) = (2,2)$, $l(M) = (1,3)$ et $w(M) = (1,0,1,2)$.

Dans [Sol] (voir aussi [GRem], [GReu], [Ges]) Solomon démontre, dans le contexte plus général des groupes de Coxeter, que Σ est une sous-algèbre. La règle de multiplication des $D_{\leq C}$ a été donnée par Garsia et Remmel [GRem].

Théorème 5.14 *L'espace Σ est une sous-algèbre de KS par rapport au produit de l'algèbre du groupe. On a:*

$$D_{\leq H} \cdot D_{\leq L} = \sum D_{\leq w(M)}, \tag{5.19}$$

où l'on somme sur toutes les matrices M d'entiers non-négatifs telles que $c(M) = H$ et $l(M) = L$.

On appellera Σ avec ce produit l' *algèbre des descentes de Solomon* .

Remarque 5.15 On a vu dans le Théorème 5.3 que (KS, Δ, ϵ) est une cogèbre. La co-unité ϵ est un morphisme pour le produit usuel de l'algèbre du groupe symétrique, tandis que Δ ne l'est pas, comme on peut voir sur l' exemple suivant. Soit $\sigma = 3124$,

$\alpha = 2143$. On a $\sigma\alpha = 1342$ et

$$\Delta(\sigma) = \lambda \otimes 3124 + 1 \otimes 213 + 12 \otimes 12 + 312 \otimes 1 + 3124 \otimes \lambda,$$
$$\Delta(\alpha) = \lambda \otimes 2143 + 1 \otimes 132 + 21 \otimes 21 + 213 \otimes 1 + 2143 \otimes \lambda,$$
$$\Delta(\sigma\alpha) = \lambda \otimes 1342 + 1 \otimes 231 + 12 \otimes 12 + 132 \otimes 1 + 1342 \otimes \lambda,$$

mais $\Delta(\sigma)\Delta(\alpha) = \lambda \otimes 1342 + 1 \otimes 231 + 21 \otimes 21 + 132 \otimes 1 + 1342 \otimes \lambda \neq \Delta(\sigma\alpha)$.

Par contre, on a

$$\Delta(D_{\leq H} \cdot D_{\leq L}) = \Delta(D_{\leq H})\Delta(D_{\leq L}),$$

i.e. Δ est un morphisme dans l'algèbre de Solomon. En effet, soit M une matrice d'entiers non-négatifs telle que $c(M) = H$ et $l(M) = L$, et soient C_1 et C_2 deux pseudo-compositions telles que $C_1 + C_2 = w(M)$. Alors les deux matrices M_1 et M_2 dont la composition associée est $w(M_i) = C_i$, $i = 1, 2$, satisfont $M_1 + M_2 = M$, $c(M_1) + c(M_2) = c(M) = H$ et $l(M_1) + l(M_2) = l(M) = L$, car l'application $M \mapsto w(M)$ est injective. On trouve donc, grâce à (5.18) et à (5.19):

$$\begin{aligned}
\Delta(D_{\leq H} \cdot D_{\leq L})) &= \sum_{\substack{c(M)=H\\ l(M)=L}} \Delta(D_{\leq w(M)}) \\
&= \sum_{\substack{c(M)=H\\ l(M)=L}} \sum_{C_1+C_2=w(M)} D_{\leq C_1} \otimes D_{\leq C_2} \\
&= \sum_{M} \sum_{M_1+M_2=M} D_{\leq w(M_1)} \otimes D_{\leq w(M)_2} \\
&= \sum_{M_1+M_2=M} \left(\sum_{\substack{c(M_1)=H_1\\ l(M_1)=L_1}} D_{\leq w(M_1)} \right) \otimes \left(\sum_{\substack{c(M_2)=H_2\\ l(M_2)=L_2}} D_{\leq w(M_2)} \right) \\
&= \sum_{\substack{H_1+H_2=H\\ L_1+L_2=L}} (D_{\leq H_1} \cdot D_{\leq L_1}) \otimes (D_{\leq H_2} \cdot D_{\leq L_2}) \\
&= \sum_{H_1+H_2=H} (D_{\leq H_1} \otimes D_{\leq H_2}) \cdot (D_{\leq L_2} \cdot D_{\leq L_2}) \\
&= \Delta(D_{\leq H})\Delta(D_{\leq L})
\end{aligned}$$

Ceci démontre le suivant

Théorème 5.16 *Avec produit usuel des permutations, coproduit* Δ *et co-unité* ϵ*,* Σ *est une bigèbre, qu'on appelle* bigèbre des descentes de Solomon.

On rappelle qu'on avait défini (voir (4.34)) sur l'espace $QSym^*_n$ un produit $\diamond$, dual du coproduit interne γ' de $QSym$. Soit $\Phi : QSym^* \longrightarrow \Sigma$ l'application linéaire qui à la base $\{F_C\}$ de $QSym^*$ associe la base $\{D_C\}$ de Σ. Comme $\dim_K QSym^*_n = \dim_K \Sigma_n = 2^{n-1}$, Φ est une bijection. On rappelle que (cf. (4.33)) $\gamma'(F_C) = \sum_{\tau\sigma=\pi} F_{C(\tau)} \otimes F_{C(\sigma)}$, pour $C = C(\pi)$; en d'autres mots, pour toute composition C, C', C'', le coefficient de $\gamma'(F_C)$ dans la base $\{F_{C'} \otimes F_{C''}\}$ de $QSym \otimes QSym$ est égal au coefficient du produit $D_{C'} \cdot D_{C''}$ dans la base $\{D_C\}$ de Σ; ou encore,

$$\Phi(F_{C'} \diamond F_{C''}) = \Phi(F_{C'})\Phi(F_{C''}).$$

De plus, dans $QSym^*_n$ on avait $u'(1) = F^*_n$ (voir (4.35)): or,

$$\Phi(F^*_n) = D_n = 12\ldots n = u'(1)$$

dans Σ_n. Ceci démontre le

Théorème 5.17 (Gessel, [Ges]) *L'application* Φ *est un isomorphisme de l'algèbre* $QSym^*$*, avec le produit hérité du coproduit interne* γ' *de* $QSym$*, dans l'algèbre* Σ *de Solomon.*

Nous pouvons donc introduire une application bilinéaire non dégénérée $\Sigma \times QSym \longrightarrow K$ définie par

$$\langle D_{C'}, F_{C''}\rangle = \delta_{C'C''}.$$

Le résultat précedent se réécrit ainsi comme:

$$\langle D_{C'} \cdot D_{C''}, F_C\rangle = \langle D_{C'} \otimes D_{C''}, \gamma'(F_C)\rangle,$$

où on étend la forme bilinéaire au produit tensoriel comme d'habitude. Alors on a:

Théorème 5.18 *L'application* Φ *est un isomorphisme de l'algèbre de Hopf* $QSym^*$*, duale de l'algèbre de Hopf* $QSym$ *avec coproduit externe* γ*, dans l'algèbre de Hopf* Σ *avec produit de convolution* $\star$ *et coproduit* Δ*.*

Dém. On avait défini $F_E = \sum_{C \geq E} M_C$, donc on aura dans le dual

$$M_C^* = \sum_{E \leq C} F_E^*.$$

Puisque $D_{\leq C} = \sum_{E \leq C} D_E$, on trouve tout de suite que $\Phi(M_C^*) = D_{\leq C}$. En comparant les égalités (5.17) et (5.18) avec (4.17) et (4.18), on déduit que Φ est un morphisme pour le produit:

$$\begin{aligned}\Phi(M_C^* M_E^*) &= \Phi(M_{CE}^*)\\ &= D_{\leq CE} = D_{\leq C} \star D_{\leq E}\\ &= \Phi(M_C^*) \star \Phi(M_E^*),\end{aligned}$$

et c'est aussi un morphisme pour le coproduit

$$\begin{aligned}\Delta \circ \Phi(M_n^*) &= \Delta(D_{\leq n})\\ &= \sum_{k+l=n} D_{\leq k} \otimes D_{\leq l}\\ &= \sum_{k+l=n} \Phi(M_k^*) \otimes \Phi(M_l^*)\\ &= (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta(M_n^*);\end{aligned}$$

en utilisant la forme bilinéaire, ceci se traduit dans les égalités suivantes, pour $x, y \in \Sigma$ et $F, G \in QSym$:

$$\langle \Delta(x), G \otimes F \rangle = \langle x, FG \rangle,$$

$$\langle x \star y, F \rangle = \langle x \otimes y, \gamma(F) \rangle. \quad \square$$

Grâce à cet isomorphisme de Σ et $QSym^*$, on peut donner explicitement l'antipode $T : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ de l'algèbre de Hopf des descentes (avec le produit de convolution $\star$).

L'antipode S de l'algèbre $QSym$ (avec coproduit externe) calculé sur la base des $\{F_C\}$ est $S(F_C) = (-1)^{|C|} F_{C'}$ (voir Corollaire 4.20). Par la dualité qu'on vient d'énoncer, on doit avoir, pour toute composition E et L:

$$\begin{aligned} \langle T(D_E), F_L \rangle &= \langle D_E, S(F_L) \rangle \\ &= \langle D_E, (-1)^{|L|} F_{L'}) \rangle \\ &= (-1)^{|L|} \delta_{E'L}, \end{aligned}$$

d'où on déduit l'expression

$$T(D_E) = (-1)^{|E|} D_{E'}. \tag{5.20}$$

Remarque 5.19 Grâce au Théorème 5.18, on réphraser le Théorème 5.17 et affirmer que Φ est un isomorphisme de la *bigèbre* $QSym^*$ avec coproduit hérité du produit interne γ' de $QSym$, dans la *bigèbre* Σ des descentes de Solomon.

Remarque 5.20 Par dualité, l'égalité (4.15) du Corollaire 4.17 donne

$$F_H^* F_L^* = F_{HL}^* + F_{H \circ L}^*,$$

où de manière équivalente, via l'isomorphisme Φ,

$$D_H \star D_L = D_{HL} + D_{H \circ L}.$$

En appliquant à cette dernière égalité l'homomorphisne canonique $\Sigma \longrightarrow Sym$ étudié par Solomon [Sol], Gessel [Ges], Garsia et Reutenauer [GReu] (voir aussi Reutenauer [Reu]), on déduit une formule de Zelevinski [Z1]:

$$S_H S_L = S_{HL} + S_{H \circ L},$$

où S_C est la fonction de Schur gauche correspondant à la forme rub(C), étudiée par MacMahon [Mcm] et Foulkes [F].

Soit $q_m : K\langle A\rangle \longrightarrow K\langle A\rangle$ la *projection* de $K\langle A\rangle$ sur $K\langle A\rangle_m = K\langle A^m\rangle$, i.e. si $P = \sum P_n \in K\langle A\rangle$ où P_n est homogène de degré n, alors $q_m(P) = P_m$. En particulier $q_0(P)$ est le terme constant du polynôme P, donc $q_0 = \epsilon$. Dénotons par Γ la sous-algèbre de convolution de $\mathrm{End}(K\langle A\rangle)$ engendrée par les $\{q_n\}$: on écrira $\Gamma = \oplus_{n\geq 0}\Gamma_n$, où Γ_n est l'espace vectoriel engendré par les éléments

$$q_C = q_{c_1} \star \ldots \star q_{c_k},$$

pour toute composition $C = (c_1, \ldots, c_k)$ de n. O a $q_0 \star q_C = q_C \star q_0$, donc $q_H = q_C$ pour toute pseudo-composition h telle que $C(H) = C$.
On remarque que si $P \in K\langle A\rangle_n$, on a

$$q_n(P) = P.D_{\leq n} = P.12\ldots n,$$

et de (5.17) on déduit que plus généralement on a

$$q_C(P) = P.D_{\leq C}.$$

Alors pour deux compositions E, L on a

$$q_E \circ q_L(P) = q_E(P.D_{\leq L}) = (P.D_{\leq L}).D_{\leq E} = P(D_{\leq L} \cdot D_{\leq E}) :$$

on obtient, en comparant avec (5.19)

$$q_E \circ q_L = \sum_{\substack{l(M)=E \\ c(M)=L}} q_{w(M)}.$$

On retrouve ainsi le résultat suivant (voir Patras [P], Reutenauer [Reu]).

Théorème 5.21 *L'algèbre de convolution* Γ *est une sous-algèbre sous la composition d'endomorphismes, anti-isomorphe à l'algèbre de Solomon.*

On déduit de ce Théorème et du Théorème 5.17 le résultat suivant.

Théorème 5.22 *L'algèbre de convolution* Γ *est anti-isomorphe à l'algèbre* $QSym^*$ *avec le produit hérité du coproduit interne* γ' *de* $QSym$. $\square$

Proposition 5.23 *Les éléments*

$$\Phi(P_i^*) = \sum_{|C|=i} \frac{(-1)^{\ell(C)-1}}{\ell(C)} D_{\leq C} \tag{5.21}$$

forment un ensemble de générateurs pour l'algèbre de Hopf Σ *des descentes.*

Dém. Dans le Théorème 4.18 nous avons démontré que les élements P_i^* de (4.22) engendrent l'algèbre de Hopf $QSym^*$. La proposition suit du fait que Φ est un isomorphisme d'algèbre de Hopf. $\square$.

Les éléments $\Phi(P_i^*)$ de Σ correspondent aux éléments

$$\pi_i = \sum_{|C|=i} \frac{(-1)^{\ell(C)-1}}{\ell(C)} q_C, \tag{5.22}$$

qui sont les projections canoniques de $K\langle A\rangle$ dans l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ (voir [GReu] et [Reu], Chapitres 3 et 9).

6 P-PARTITIONS ET LA CONGRUENCE PLAXIQUE

Dans ce chapitre on prend en considération, à la suite de Stanley [Sta] et Gessel [Ges], une famille d'ensembles partiellement ordonnés, qui s'obtiennent à partir d'une forme gauche. On démontre que si l'ensemble $L(P)$ des extensions linéaires d'un ensemble partiellement ordonné P forme une réunion de classes plaxiques, alors P provient d'une forme gauche.

Etant données deux partitions λ et μ, avec $\lambda \supseteq \mu$, de poids $|\lambda/\mu| = n$, on définit une famille $\mathbf{P}_{\lambda/\mu}$ d'ordres partiels, dont les diagrammes de Hasse s'obtiennent en remplissant d'abord la forme gauche λ/μ avec les lettres de P (rappellons que P est un ensemble totalement ordonné), de sorte que les lignes de λ/μ soient croissantes et les colonnes décroissantes (par rapport à l'ordre total $\leq$ de P), ensuite en tournant de 45^0 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
Par exemple, si $P = [8]$ avec l'ordre naturel, et $\lambda/\mu = 443/21$, alors $\mathbf{P}_{\lambda/\mu}$ consiste en les ordres partiels suivants:

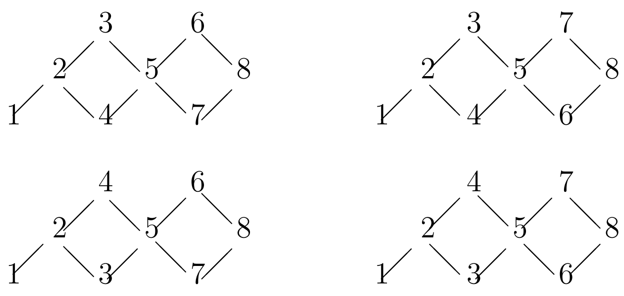


Figure 16.

Remarque 6.1 Soit $P \in \mathbf{P}_{\lambda/\mu}$. Il est facile de voir dans ce cas que une P-partition $f \in A(P)$ est un tableau T de forme λ/μ (au sens de la définition de la page 9), et que le monôme $\prod_{a\in P} f(a) = |T|$ est le poids du tableau. Ainsi, par (3.3), la fonction génératrice de P sera

$$\Gamma(P) = \sum_{f\in A(P)} \prod_{a\in P} f(a) = \sum_{T \text{ de forme } \lambda/\mu} |T| = s_{\lambda/\mu},$$

et elle est donc symétrique (voir Bender-Knuth [BK]).

Dans [Sta], Stanley pose la conjecture suivante.

Soit P un ordre partiel tel que sa fonction génératrice soit symétrique. Alors P provient d'une forme gauche, i.e. ils existent λ, μ tels que $P \in \mathbf{P}_{\lambda/\mu}$.

Comme dans la Section 4.2, soit P un alphabet totalement ordonné à n lettres. Comme définie par Lascoux et Schützenberger [LS], la *congruence plaxique* sur $P^\star$ est la plus petite congruence $\sim$ qui contient les relations de Knuth (utilisées dans la correspondance entre mots et tableaux, voir Knuth [K]):

$$\begin{array}{cccc} \text{si} & x<y<z & \text{alors} & yzx \sim yxz \\ & & \text{et} & zxy \sim xzy \\ \text{si} & x<y & \text{alors} & yxx \sim xyx \\ & & \text{et} & yyx \sim yxy. \end{array}$$

La *classe plaxique* d'un mot $w \in P^\star$ est l'ensemble de mots qui sont congrus à w. Un sous-ensemble L de mots de $P^\star$ est *clos pour la congruence plaxique* (ou *plaxiquement clos*) si à chaque fois que $w \in L$ et $w \sim v$, alors $v \in L$: L sera donc la réunion disjointe des classes plaxiques de ses éléments.

Nous appelons *composante connexe* de P une composante connexe de son diagramme de Hasse.

Dans [GRem], Property A, Garsia et Remmel démontrent la proposition suivante.

Proposition 6.2 *Soit $P \in \mathbf{P}_{\lambda/\mu}$ tel que chaque composante connexe forme un intervalle de P (pour l'ordre total de P). Alors $L(P)$ est plaxiquement clos.*

L'hypothèse supplémentaire sur P est nécessaire. Soit P l'ensemble partiellement ordonné qui correspond à l'étiquetage suivant de $\lambda/\mu = 32/2$:

$$\begin{array}{|c|c|c} \hline 1 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{} & 2 \\ \cline{3-3} \end{array}$$

Or, $P \in \mathbf{P}_{32/2}$, mais $L(P) = \{213, 123, 132\}$ n'est pas plaxiquement clos.

On avait défini la fonction génératrice d'un ensemble partiellement ordonné $(P, \leq_P)$ par

$$\Gamma(P) = \sum_{w \in L(P)} F_{C(w)}.$$

Plus généralement, la *fonction génératrice quasi-symétrique* d'un ensemble quelconque L de permutations, est la fonction quasi-symétrique (voir Gessel [Ges] et Gessel-Reutenauer [GeRe])

$$F_L = \sum_{w \in L} F_{C(w)}.$$

Alors, si l'on applique la correspondance de Robinson-Schensted-Knuth, on peut déduire le résultat suivant (cf. [Tho], [LS], [DW].

Proposition 6.3 *Soit L un ensemble de permutations plaxiquement clos. Alors la fonction F_L est symétrique.*

Supposons que la conjecture de Stanley soit vraie. Si $L(P)$ est une réunion de classes plaxiques, alors par la Proposition 6.3 $\Gamma(P)$ est symétrique: dans ce cas, la conjecture nous dirait que $P \in \mathbf{P}_{\lambda/\mu}$. Ici nous démontrons ce fait directement.

Théorème 6.4 *Soit $(P, \leq_P)$ tel que $L(P)$ est plaxiquement clos. Alors $P \in \mathbf{P}_{\lambda/\mu}$.*

Ce résultat avait été conjecturé par Reutenauer. Pour montrer ce théorème, on étudiera le diagramme de Hasse de P localement: le fait que $L(P)$ est clos pour la congruence impliquera certaines restrictions sur ses sous-ensembles.

Chaque sous-ensemble Q d'un ensemble partiellement ordonné P est partiellement ordonné, avec l'ordre partiel $\leq_Q$ hérité de P:

$$a \leq_Q b \Longleftrightarrow a \leq_P b, \text{ pout tout } a, b \in Q.$$

Il est facile de voir que toute extension linéaire de Q apparaît comme un sous-mot (mais en général pas comme un facteur) d'une extension linéaire de P.
On dit qu'un sous-ensemble Q de P est *convexe* si pour tout $p \in P$ et $q_1, q_2 \in Q$ tels que $q_1 \leq_P p \leq_P q_2$, on a $p \in Q$. Dans ce cas, on peut affirmer que:

Lemme 6.5 *Si $Q \subseteq P$ est convexe dans P, alors pour tout $w \in L(Q)$, il existe $\overline{w} \in L(P)$ tel que w est un facteur de $\overline{w}$. En d'autres mots, toute extension linéaire de Q est un facteur de quelque extension linéaire de P.*

Dém. Par récurrence sur $|P \setminus Q|$. Soient A, B, C les sous-ensembles suivants de $P \setminus Q$:

$$A = \{x \in P \setminus Q \mid \exists\, q \in Q \text{ tel que } x \leq_P q\}$$
$$B = \{x \in P \setminus Q \mid \exists\, q \in Q \text{ tel que } x \geq_P q\}$$
$$C = \{x \in P \setminus Q \mid x \text{ est incomparable à tout élément de } Q\}$$

Il est clair que $A \cup B \cup C = P \setminus Q$ et que $A \cap C = B \cap C = \emptyset$. En fait, on a aussi $A \cap B = \emptyset$: sinon, soit $y \in A \cap B$; il existe alors $q, q' \in Q$ tels que $q' \leq_P y \leq_P q$, et, puisque Q est convexe dans P, on aurait $y \in Q$, une contradiction. En somme, A, B et C forment une partition de l'ensemble $|P \setminus Q|$.
Si $|P \setminus Q| = 0$, alors $Q = P$ et l'énoncé est vrai. Supposons alors que $|P \setminus Q| > 0$, et soit $w \in L(Q)$.

Si $C \neq \emptyset$, soit $c \in C$. Alors le sous-ensemble $Q' = Q \cup \{c\}$ est encore convexe dans P: en effet, il n'y a pas d'éléments $p \in P$, $q \in Q$ tels que $c \leq_P p \leq_P q$ ou bien $q \leq_P p \leq_P c$, sinon c serait comparable à un élément de Q. De plus on a $cw \in L(Q')$; comme $|P \setminus Q'| < |P \setminus Q|$, par récurrence il existe u, v, tels que $\overline{w} = u(cw)v = (uc)wv \in L(P)$.

Si $C = \emptyset$ et $A \neq \emptyset$, soit $a \in A$ un élément maximal pour l'ordre partiel $\leq_P$. Dans ce cas, le sous-ensemble $Q' = Q \cup \{a\}$ est convexe dans P: en effet, si $p \in |P \setminus Q|$, $q \in Q$ tels que $a \leq_P p \leq_P q$, on a $p \in A$ et $p \geq_P a$, donc $p = a$ par maximalité de a. On ne peut pas avoir non plus $q \leq_P p \leq_P a$ puisque, par définition de l'ensemble A, il existe $q' \in Q$ tel que $a \leq_P q'$, alors on aurait $q \leq_P a \leq_P q'$ et la convexité de Q impliquerait $a \in Q$. Ensuite, on observe que $aw \in Q'$: sinon, a n'est pas maximal dans Q', et il existe $q \in Q$ tel que $q \leq_P a$, et cela signifie que $a \in A \cap B$: contradiction. Comme $|P \setminus Q'| < |P \setminus Q|$, par récurrence il existe u, v, tels que $\overline{w} = u(aw)v \in L(P)$.

A la fin , supposons que $C = \emptyset$, $A = \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, et soit $b \in B$ un élément minimal de B. Par un raisonnement analogue à celui qu'on vient de faire, on montre que $Q' = Q \cup \{b\}$ est convexe dans P et que $wb \in L(Q')$, de sorte que, par récurrence, wb est un facteur de quelque mot de $L(P)$, ce qui prouve le lemme. $\square$

Corollaire 6.6 *Si Q est convexe dans P et $L(P)$ est plaxiquement clos, alors $L(Q)$ aussi est plaxiquement clos.*

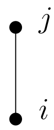
Dém. On dénote par $\pi : P^\star \longrightarrow Q^\star$ la projection canonique de l'ensemble des mots dans l'alphabet P à l'ensemble des mots dans l'alphabet Q, qui , à tout mot $u \in P^\star$ associe le mot $\pi(u) \in Q^\star$ qu'on obtient en oubliant dans u les lettres de $|P \setminus Q|$. Il est clair, par définition d'extension linéaire, que si $u \in L(P)$ alors $\pi(u) \in L(Q)$. Soit $w \in L(Q)$ et $w \sim w'$: on veut montrer que $w' \in L(Q)$. Par le Lemme 6.5, on peut trouver $\overline{w} = uwv \in L(P)$. On a $\overline{w} \sim uw'v$ (car $\sim$ est une congruence)

Figure 17.

et $uw'v \in L(P)$, car $L(P)$ est clos pour la congruence plaxique; en particulier sa projection $\pi(uw'v) = w'$ est dans $L(Q)$. $\square$

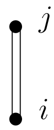
On dénotera par $\prec_P$ la relation de consécutivité (ou recouvrement) de l'ordre partiel $\leq_P$, i.e. $i \prec_P j$ si et seulement si $i \leq_P j$ et il n'y a pas d'élément $k \in P$ tel que $i <_P k <_P j$. On rappelle que le *diagramme de Hasse* d'un ensemble partiellement ordonné $(P, \leq_P)$ est le graphe dont les sommets sont les éléments de P et les arêtes sont les relations de recouvrement telles que si $i \leq_P j$, on dessine j en haut de i. Par exemple, si P est décrit par $i <_P j$, $j <_P k$, $i <_P k$, alors son diagramme de Hasse est bien le graphe de gauche plutôt que celui de droite dans la Figure 17.

Par la suite, on prend la convention suivante: si $i \prec_P j$, on dessine dans le diagramme de Hasse une arête simple si $i < j$,



si $i < j$

une arête double, si $i > j$



si $i > j$

Dans cette notation le premier ensemble ordonné de la Figure 16 sera

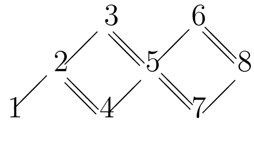


Figure 18.

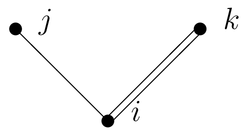
On suppose dorénavant que $L(P)$ est plaxiquement clos.

Lemme 6.7 *Aucune des configurations suivantes n'apparaît dans le diagramme de Hasse de P:*

Dém. D'abord on remarque que tous les Q_i dans la Figure 18 sont convexes dans P, parce qu'on regarde le diagramme de Hasse. Or, supposons que la configuration Q_1 soit dans le diagramme de Hasse de P. Cela veut dire que $i \leq_P j$ avec $i < j$ et $i \leq_P k$ avec $i < k$. Si $j < k$ (respectivement $k < j$), on a $i < j < k$ (respectivement $i < k < j$), alors $ikj \sim kij$ (respectivement $ijk \sim jik$), où $ikj \in L(Q_1)$, mais $kij \notin L(Q_1)$ (respectivement $ijk \in L(Q_1)$ mais $jik \notin L(Q_1)$): on a ici une contradiction, parce que, par le Corollaire 6.6, $L(Q_1)$ est clos pour la congruence plaxique. De la même manière, on peut montrer que Q_2, Q_3 et Q_4 non plus n'apparaissent pas dans P. $\square$

Lemme 6.8 *Pour tout $i \in P$, il y a au plus deux éléments dans P qui couvrent I et au plus deux éléments qui sont couverts par i.*

Dém. S'il existe $j, k \succ_P i$, alors , par le Lemme 6.7, le diagramme de Hasse du sous-ensemble $Q = \{i, j, k\}$ dans P a la forme suivante



Pour tout autre élément $h \in P$ qui couvre i , on obtiendrait dans le diagramme de Hasse de P une des configurations suivantes, une contradiction au Lemme 6.7.

Le même raisonnement montre que i couvre au plus deux éléments. $\square$

Lemme 6.9 *Si les configurations suivantes*

Figure 19.

apparaissent dans le diagramme de Hasse de P, alors Q et Q' ne sont pas convexe dans P.

Dém. Si Q est convexe dans P, alors par le Corollaire 6.6 $L(Q)$ est plaxiquement clos. Dans Q on a $i < j$, $j > k$. Si $i < k$, alors $i < k < j$ et $ijk \sim jik \in L(Q)$ (respectivement $i > k, k < i < j, ijk \sim ikj \in L(Q)$), une contradiction, parce que $L(Q)$ consiste d'une seule extension linéaire, qui est ijk. Le cas de la configuration Q' se traite de la même façon, en utilisant les relations de Knuth. $\square$

Corollaire 6.10 *Dans les hypothèses du Lemme 6.9, il existe un et un seul élément $h \neq i$ tel que $i \prec_P h \prec_P k$ et dans P nous avons les configurations suivantes (qui correspondent respectivement à Q et à Q').*

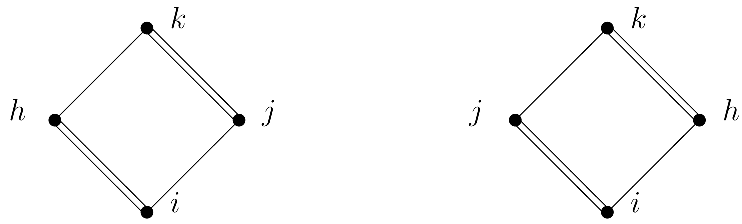
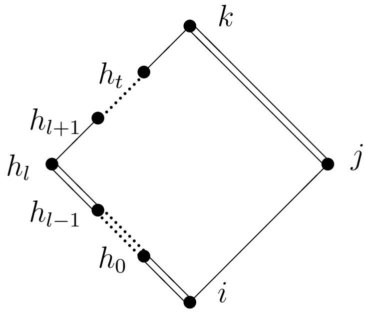


Figure 20.

Dém. Nous traitons uniquement le cas de Q (celui de Q' est analogue).
L'existence d'un tel élément h est assurée par le Lemme 6.9, car si Q apparaît dans P, alors il existe une chaîne de i à k

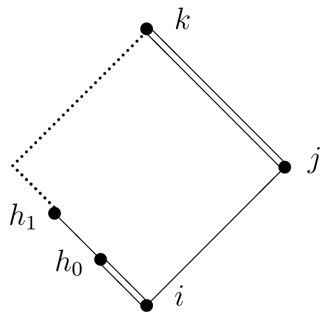
$$\underline{h} = (i \prec_P h = h_0 \prec_P h_1 \prec_P \ldots \prec_P h_t \prec_P h_{t+1} = k) \tag{6.1}$$

dans l'ensemble partiellement ordonné, différente de la chaîne $i \prec_P j \prec_P k$. On remarque que $h_1 \neq j$, car si $i \prec_P h_0 \prec_P h_1 = j$, alors j ne couvre pas i. De plus, par le Lemme 6.7, on peut noter que $i > h = h_0$, puisque on a déjà une arête simple entre i et j, a cause de l'inegalité $i < j$.
Pour toute chaîne $\underline{h}$ de la forme (6.1), on définit $l(\underline{h})$ comme étant l'entier $0 \leq l \leq t$ tel que $h_0 > h_1 > \ldots > h_l$ et $h_l < h_{l+1}$.

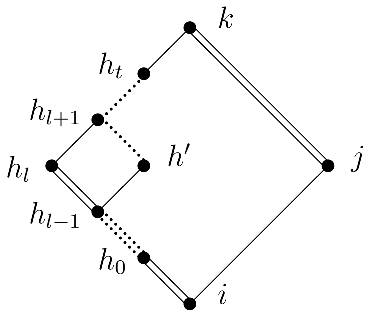


Cet entier est bien défini, car on a $h_t < h_{t+1} = k$: en effet, puisque $j > k = h_{t+1}$, il ne peut pas arriver que $h_t > h_{t+1} = k$, car sinon on aurait encore une des configurations interdites par le Lemme 6.7.

Soit $\underline{h}$ une chaîne telle que $l(\underline{h}) = l$ soit minimal: on affirme que $l = 0$. Si ceci est vrai, alors le sous-ensemble $i \prec_P h_0 \prec_P h_1$satisfaît les hypothèses du Lemme 6.9, et dans ce cas, il n'est pas convexe dans P:



il existe donc $j' \neq h_0$ tel que $i \prec_P j' \leq_P h_1$ et par le Lemme 6.8, $j' = j$. Ceci implique $j \leq_P h_1 \leq_P k$, mais k couvre j: on en déduit $h_1 = k$ ce qui prouve l'existence de h. Supposons maintenant que $l > 0$. Dans ce cas, la chaîne $h_{l-1} \prec_P h_l \prec_P h_{l+1}$, par le Lemme 6.9, n'est pas convexe dans P, parce que $h_{l-1} > h_l < h_{l+1}$: soit $h' \in P$ tel que $h_{l-1} \prec_P h' \prec_P h_{l+1}$. Encore une fois on a $h_{l-1} < h'$ par le Lemme 6.7, puisque $h_{l-1} > h_l$.

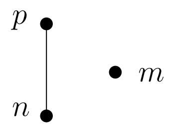


Considérons alors la nouvelle chaîne $\underline{h'}$ qu'on obtient en remplaçant dans $\underline{h}$ la sous-chaîne $h_{l-1} \prec_P h_l \prec_P h_{l+1}$ par $h_{l-1} \prec_P h' \prec_P \ldots \prec_P h_{l+1}$. Il résulte $l(\underline{h'}) = l - 1 < l(\underline{h})$: contradiction.

Pour l'unicité de l'élément h, il suffit de remarquer que pour tout autre élément $h' \neq h$ qui satisfaît $i \prec_P h' \prec_P k$, on a une contradiction avec le Lemme 6.8. $\square$

Lemme 6.11 *Si $P_1 \subset P$ est une composante connexe de P, avec $|P_1| \geq 2$, alors les éléments de P_1 forment un intervalle pour l'ordre total de P.*

Dém. Soit $P_1 = \{p_1 < \ldots < p_k\}$, et supposons par l'absurde qu'il existe $m \in P \backslash P_1$ tel que $p_i < m < p_{i+1}$ pour quelque $1 \leq i \leq k-1$. En particulier, il existe deux éléments $n \in \{p_1, \ldots, p_i\}$ et $p \in \{p_{i+1}, \ldots, p_k\}$ qui sont consécutifs dans P_1 pour l'ordre partiel $\leq_P$, car sinon P_1 n'est pas connexe. Supposons que $n \prec_P p$ (le cas $p \prec_P n$ étant tout-à-fait analogue) . Alors dans P le sous-ensemble $Q = \{n < m < p\}$ est convexe, et il correspond dans le diagramme de Hasse de P à la configuration suivante:

$Q =$ 

Or, $L(Q) = \{mnp, nmp, npm\}$ n'est pas plaxiquement clos, car $npm \in L(Q)$ mais $pnm \notin L(Q)$. Par contre, le Corollaire 6.6 nous assure que, Q étant convexe, $L(Q)$ est plaxiquement clos, une contradiction. $\square$

Remarque 6.12 Le Lemme précédent nous assure qu'on peut ordonner les composantes connexes de P, disons $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_s$, de sorte que, si $i < j$, tous les éléments de P_i soient plus petits (pour l'ordre total $\leq$ de P) que tous les éléments de P_j.

On est prêt finalement à reconstruire l'ensemble partiellement ordonné P dans le plan discret $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ muni de l'ordre partiel naturel:

$$(x, y) \leq (x', y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

La relation de recouvrement dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est donnée par

$$(x, y) \prec (x', y') \Longleftrightarrow (x', y') = (x, y+1) \text{ ou } (x', y') = (x+1, y).$$

Dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ un *chemin* de (x, y) à (x', y') est une suite de points

$$((x, y) = (x_1, y_1); (x_2, y_2); \ldots ; (x_k, y_k) = (x', y'))$$

telle que , pour $i = 1, \ldots, k-1$ on a $(x_i, y_i) \prec (x_{i+1}, y_{i+1})$ ou bien $(x_{i+1}, y_{i+1}) \prec (x_i, y_i)$. Deux points (x, y) et (x', y') sont dits *connexes* dans un sous- ensemble T de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ s'il existe un chemin de (x, y) à (x', y') dont tous les points sont dans T.

Remarque 6.13 Il est facile de se convaincre que tout sous-ensemble T qui est convexe dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ correspond en fait à un diagramme gauche de forme ν/ρ (voir page 10). Il faut remarquer aussi que si on fait "glisser" les composantes connexes d'un diagramme gauche dans le plan discret de sorte que le résultat soit encore un ensemble convexe, l'ordre partiel correspondant ne change pas (voir Figure 21).

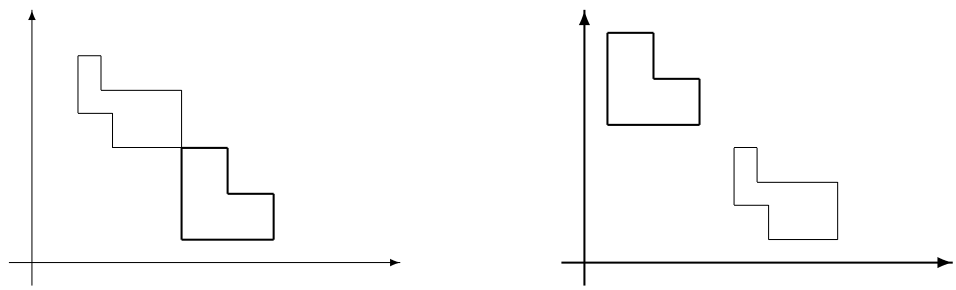


Figure 21.

Le Théorème 6.4 prend alors la forme suivante: si $L(P)$ est plaxiquement clos, il existe une injection $e : P \longrightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ qui respecte l'ordre $\leq_P$, (i.e. qui soit un morphisme d'ensembles ordonnés), telle que $e(P)$ soit un diagramme gauche λ/μ et que si le point $e(p)$ est étiqueté par p, pour tout $p \in P$, alors $e(P) \in \mathbf{P}_{\lambda/\mu}$.

Dém. du Théorème 6.4 Par récurrence sur $|P|$. Si $|P| \leq 2$, le Théorème est vrai, car on a les possibilités suivantes pour P

Figure 22.

qui correspondent respectivement au diagrammes de forme (1), (2), (11) et 21/1. Supposons alors que $|P| \geq 3$, et soit m un élément maximal dans $(P, \leq_P)$. On voit facilement que $Q = P \setminus \{m\}$ est un sous-ensemble convexe dans P, donc il est plaxiquement clos (par le Corollaire 6.6): par hypothèse de récurrence il existe une injection $e : Q \longrightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ telle que $e(Q)$ est un diagramme gauche. On vise à étendre l'injection e "correctement" à tout P, c'est-à-dire, à coller m à la forme gauche qui correspond à $e(Q)$ de sorte qu'il en résulte encore une forme gauche.
Comme on a déjà vu (Lemme 6.8), m couvre au plus deux éléments et cela nous fournit les quatre cas suivants à analyser:

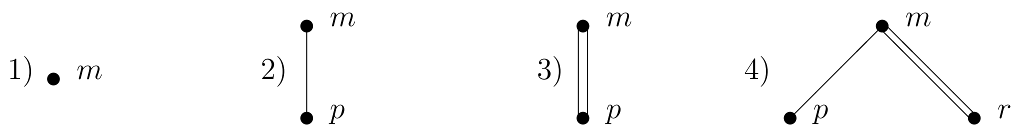


Figure 23.

Cas 1) L'élément m est incomparable à tout élément de Q, donc il forme une composante connexe de P. Avec les notations de la Remarque 6.12, soit $\{m\} = P_j$. Par récurrence il existe une injection $e : Q \longrightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ telle que $e(Q)$ est une forme gauche dont l'étiquetage est croissant par lignes et décroissant par colonnes (selon la direction des axes des coordonnées). Il est clair qu'on peut définir l'injection e'

comme dans la Figure 24, et que, par la Remarque 6.12, l'étiquetage reste croissant par lignes et décroissant par colonnes.

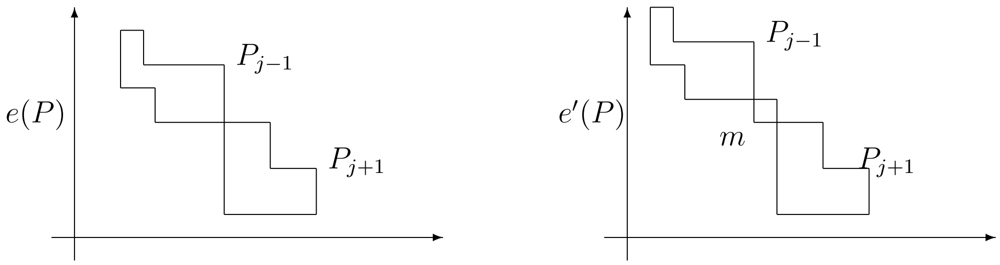
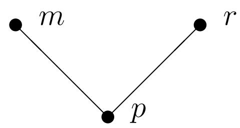


Figure 24.

Cas 2) Nous observons que rien n'est à la droite et sur la même ligne que $e(p)$ dans $e(Q)$: car sinon, il existe $r \in Q$, $r \neq m$ tel que la configuration suivante



est dans le diagramme de Hasse de P, ce qui contredit le Lemme 6.7. Par conséquence nous pouvons étendre e à P par

$$e(m) = e(p) + (1, 0) = (x_p + 1, y_p)$$

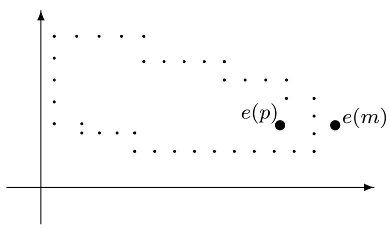


Figure 25.

où on indique par (x_p, y_p) les coordonnées du point $e(p)$ dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Or, l'injection e est un morphisme parce que e respecte la relation de consécutivité. Pour montrer que

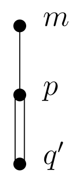
$e(P)$ est une forme gauche, il nous reste à montrer sa convexité dans le plan discret. Nous démontrons d'abord que pour tout $q \in Q$, connexe ou pas à p, l'inégalité

$$y_q \geq y_p \tag{6.2}$$

est vérifiée.

Si $e(q)$ et $e(p)$ ne sont pas connexes, on peut toujours faire glisser dans le plan la composante connexe de $e(q)$ en dessus de celle de $e(p)$ (voir Remarque 6.13 et Figure 21), l'ordre partiel qui en résulte étant le même. Cela correspond à donner une autre injection $e' : Q \longrightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, telle que $y'_q \geq y'_p$, où $e'(a) = (x'_a, y'_a)$.

Si $e(q)$ et $e(p)$ sont dans la même composante connexe, supposons par l'absurde que (6.2) n'est pas vérifié, c'est-à-dire qu'il existe $q \in Q$ avec $y_q < y_p$, i.e. $e(q)$ est en dessous de $e(p)$. Parmi ces éléments, nous montrons que nous pouvons toujours choisir un élément q' tel que $e(q') = (x_p, y_p - 1)$. Ceci montrera que dans P on a la configuration suivante:



alors, par le Corollaire 6.10, il y a un autre point couvert par m, contre l'hypothèse de la Figure 23-1).

Montrons donc que q' comme ci-dessus existe. En effet, si $e(q)$ est à la gauche de $e(p)$, i.e. $x_q \leq x_p$, alors on a (voir Figure 26)

$$e(q) \leq (x_p, y_p - 1) \leq e(p),$$

et par convexité de $e(Q)$, il existe $q' \in Q$ avec $e(q') = (x_p, y_p - 1)$. Si $e(q)$ est à

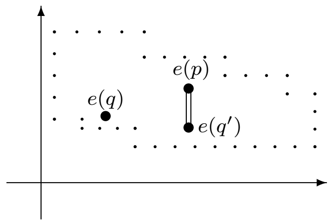


Figure 26.

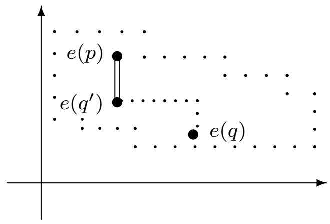


Figure 27.

la droite de $e(p)$, i.e. $x_q \geq x_p$, comme $e(q)$ et $e(p)$ sont dans la même composante connexe, il existe un chemin dans $e(Q)$ de $e(p)$ à $e(q)$ (voir Figure 27):

en particulier il existe $q' \in Q$ avec $e(q') = (x_p, y_p - 1)$.

On revient maintenant à la convexité de $e(P)$. Supposons qu'il existe un point $(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et $q \in Q$ avec

$$e(q) \leq (x, y) \leq e(m) \tag{6.3}$$

(le cas $e(m) \leq (x, y) \leq e(q)$ ne s'appliquant pas, car m est maximale dans P). On veut montrer que $(x, y) \in e(P)$. L'inégalité (6.3) se traduit dans les deux inégalités suivantes pour les abscisses et les ordonnées:

$$x_q \leq x \leq x_m = x_p + 1, \tag{6.4}$$

$$y_q \leq y \leq y_m = y_p. \tag{6.5}$$

Cette dernière avec (6.2) implique $y = y_q = y_p$. Or, si dans (6.4) on a $x < x_p + 1$, i.e. $x \leq x_p$, alors $e(q) \leq (x, y) = (x, y_p) \leq e(p)$, et comme $e(Q)$ est convexe, on a $(x, y) \in e(Q) \subset e(P)$; si $x = x_p + 1$, alors $(x, y) = e(m) \in e(P)$.

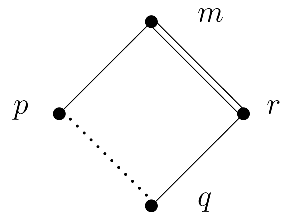
Cas 3) Analogue (dual) au cas 2).

Cas 4) Il faut considérer les deux possibilités suivantes:

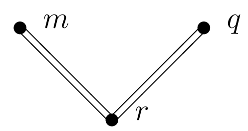
(i) p et r ne sont pas connexes dans Q: par récurrence, on sait qu'il existe une injection $e : Q \longrightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ telle que $e(Q)$ est une forme gauche. On aimerait pouvoir définir une autre injection e' de Q, en faisant glisser dans le plan les composantes contenant $e(p)$ et $e(r)$, de sorte qu'on ait (voir Figure 28)

$$e'(p) = (x_r - 1, y_r + 1) = e'(r) + (-1, 1).$$

Pour ce faire, il faut montrer que dans $e(Q)$, l'élément $e(r)$ se trouve dans le coin supérieur gauche de sa composante connexe et $e(p)$ est dans le coin inférieur droit de sa composante connexe. Or, s'il existe un élément $q \in Q$ tel que $e(q)$ est à la gauche de $e(r)$ (dans sa composante connexe), alors on aurait la configuration suivante dans le diagramme de Hasse de P:



donc par le Corollaire 6.10 p et q seraient connexes dans Q, contrairement à l'hypothèse (i). Enfin s'il existe un élément $q \in Q$ tel que $e(q)$ est en dessus de $e(r)$ (dans sa composante connexe), alors dans P on aurait la configuration suivante



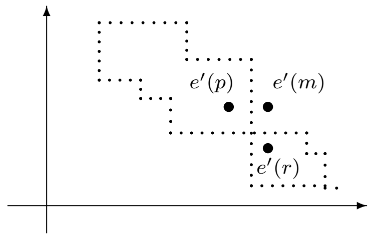


Figure 28.

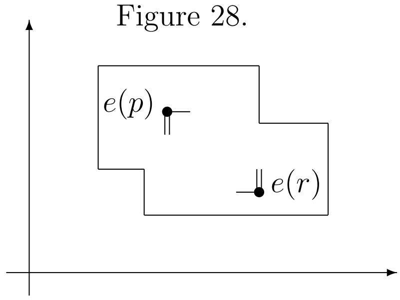


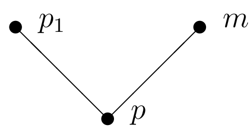
Figure 29.

contrairement au Lemme 6.7. On peut alors étendre e' à tout P par $e'(m) = (x_r, y_p)$ (voir Figure 28), et $e'(P)$ reste ainsi une forme gauche.

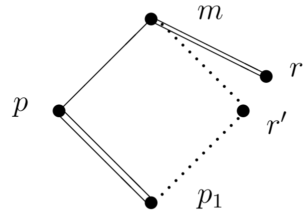
(ii) p et r sont connexes dans Q: comme p et r ne sont pas comparables dans P (pour l'ordre partiel de P), $e(p)$ et $e(r)$ ne sont pas comparables dans $e(Q)$. De plus on a $p < r$, par la Figure 23-4): par connexité, il existe un chemin dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ de $e(p)$ vers $e(q)$ et il s'ensuit qu'il n'y a qu'une façon de les plonger dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, indiquée dans la Figure 29. Soit

$$(e(p), e(p_1), \ldots, e(p_t), e(r)),$$

un chemin de $e(p)$ à $e(r)$. Si le chemin commence avec un pas horizontal, i.e. $e(p_1) = (x_p + 1, y_p)$, alors dans P on a



ce qui contredit le Lemme 6.7. Alors le chemin doit commencer par un pas vertical, c'est-à-dire $e(p_1) = (x_p, y_p - 1)$, et dans P on a la configuration suivante



Dans ce cas, par le Corollaire 6.10, il existe $r' \in Q$, $r' \neq p$ avec $p_1 \prec_P r' \prec_P m$, et $r' = r$ (sinon m couvre trois éléments distincts): ceci implique que la suite

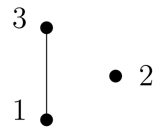
$$(e(p), e(p_1), e(r))$$

est un chemin dans $e(Q)$. Donc $e(p) = e(r) + (-1, 1)$. Comme on a déjà montré, il n'y a rien à droite de $e(p)$ ou au-dessus de $e(r)$. Finalement on peut étendre e à tout P par

$$e(m) = (x_r, y_p) = e(r) + (0, 1) = e(p) + (1, 0)$$

et $e(P)$ reste une forme gauche. $\square$

Remarque 6.14 On a vu que (voir Remarque 6.12) si P est un ensemble partiellement ordonné tel que $L(P)$ est plaxiquement clos, alors chaque composante connexe de P forme un intervalle (pour l'ordre total $\leq$ de P). Ceci n'est pas vrai si on est seulement sous l'hypothèse que $\Gamma(P)$ est une fonction symétrique, comme on voit de l'exemple suivant. Si

$P =$ 

on trouve $\Gamma(P) = h_1 h_2 \in Sym$, mais $L(P)$ n'est pas plaxiquement clos.

Supposons dorénavant que dans P chaque composante connexe forme un intervalle. Ceci n'altère pas le caractère symétrique de $\Gamma(P)$. On pose la conjecture suivante:

Si la fonction génératrice $\Gamma(P)$ est symétrique, alors pour tout sous-ensemble convexe $Q \subseteq P$, $\Gamma(Q)$ est symétrique.

On peut voir alors que cette dernière conjecture est équivalente à la Conjecture de Stanley.

Théorème 6.15 *Si la conjecture ci-dessus est vérifiée, les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) $\Gamma(P)$ est symétrique.

(ii) $L(P)$ est plaxiquement clos.

(iii) Si $Q \subseteq P$ est convexe dans P, alors $\Gamma(P)$ est symétrique.

(iv)Si $Q \subseteq P$ est convexe dans P, alors $L(P)$ est plaxiquement clos.

(v) $P \in \mathbf{P}_{\lambda/\mu}$ pour quelques partitions $\lambda \supseteq \mu$.

Dém. $(v) \implies (i)$ C'est la Remarque 6.1.

$(v) \implies (ii)$ C'est la Proposition 6.2.

$(ii) \implies (iv)$ C'est le Corollaire 6.6.

$(iv) \implies (ii)$ P est évidemment convexe dans P.

$(i) \implies (iii)$ C'est la Conjecture.

$(ii) \implies (i)$ C'est la Proposition 6.3.

$(ii) \implies (v)$ C'est le Théorème 6.4.

$(iii) \implies (v)$ Aucune des configurations de la Figure 18 n'apparaît dans le diagramme de Hasse de P. Sinon, supposons par exemple que Q_1 y apparaît. Or si on calcule la série génératrice de Q_1 on trouve

$$\Gamma(Q_1) = F_{C(123)} + F_{C(132)} = F_{111} + F_{21} \notin Sym,$$

mais Q_1 est convexe dans P, alors par hypothèse $\Gamma(Q_1)$ devrait être une fonction symétrique:une contradiction. Un raisonnement analogue nous amène à éliminer les autres configurations. Ceci correspond en fait au Lemme 6.7, où l'hypothèse que $L(P)$ est plaxiquement clos est remplacée par l'hypothèse que $\Gamma(P)$ est symétrique. De plus, si les configurations de la Figure 19 apparaissent dans le diagramme de Hasse de P, alors les ensembles correspondants ne sont pas convexes dans P. Car, si par exemple Q était convexe dans P, sa fonction génératrice serait par hypothèse symétrique, mais un calcul direct donne $\Gamma(Q) = F_{C(132)} = F_{21} \notin Sym$, une contradiction. Il en va de même pour Q'. Ceci correspond au Lemme 6.9. Maintenant, on remarque que dans la preuve du Théorème 6.4, les lemmes qu'on vient de citer, avec la Remarque 6.12, impliquent tout le reste de la preuve. Ainsi on a que $P \in \mathbf{P}_{\lambda/\mu}$ pour une forme gauche λ/μ. $\square$

7 ÉVACUATION DE GRAPHES ÉTIQUETÉS

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté sans boucles, où V est l'ensemble des sommets, $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ est l'ensemble des arêtes du graphe. Un *étiquetage* de G sera dans ce contexte toute bijection $\Phi : V \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$, avec $|V| = n$.

La *traînée canonique* de Φ est le sous-ensemble $P(\Phi) = \{v_1, \ldots, v_k\}$ de V, défini par les conditions suivantes:

(i) $V_1 = \Phi^{-1}(1)$;

(ii) pour $i \geq 2, v_i = \Phi^{-1}(\min\{\Phi(v)|(v, v_{i-1}) \in E \text{ et } \Phi(v) > \Phi(v_{i-1})\}),$ si un tel sommet v_i existe;

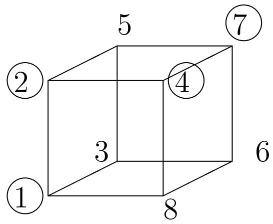
(iii) si un tel v_i n'existe pas, alors $k = i - 1$.

La traînée de (G, Φ) est donc le chemin dans le graphe qui commence au sommet étiqueté par 1, à étiquettes croissantes, qui parcourt au fur et à mesure les sommets qui ont la plus petite étiquette, et dont la longueur est maximale. La *promotion* de Φ est l'application $\partial : \Phi \longrightarrow \partial\Phi$ définie par

$$\begin{aligned} \partial\Phi(v) &= \Phi(v) - 1 && \text{si } v \notin P(\Phi) \\ \partial\Phi(v_i) &= \Phi(v_{i+1}) - 1 && \text{pour } i = 1, \ldots, k-1 \\ \partial\Phi(v_k) &= n. \end{aligned}$$

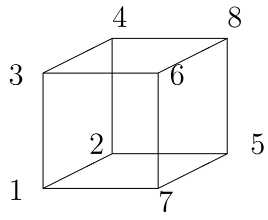
Exemple

(G, Φ)



La traînée est l'ensemble des sommets encerclés. La promotion de Φ est montrée dans la Figure suivante.

$(G, \partial\Phi)$



Pour un entier $1 \leq s \leq n$, la *s-promotion* de Φ est l'application $\partial_s : \Phi \longrightarrow \partial_s\Phi$ qu'on obtient de la construction précédente quand on se restreint aux sommets d' étiquettes $\{1, \ldots, s\}$ et on ne touche pas les sommets d'étiquettes $\{s+1, \ldots, n\}$. Plus précisément, soit $V' = \{v \in V | \Phi(v) \leq s\}$, $P' = P(\Phi) \cap V' = \{v_1, \ldots, v_l\}$. Alors

$$\partial_s\Phi(v) = \Phi(v) \text{si } v \notin V',$$

et si $v \in V'$

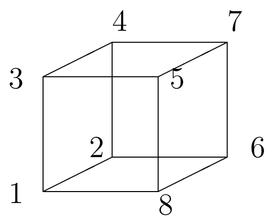
$$\begin{aligned} \partial_s\Phi(v) &= \Phi(v) - 1 && \text{si } v \notin P' \\ \partial_s\Phi(v_i) &= \Phi(v_{i+1}) - 1 && \text{pour } i = 1, \ldots, l-1 \\ \partial_s\Phi(v_l) &= s. \end{aligned}$$

Avec ces notations on a $\partial = \partial_n$ si $n = |V|$ et $\partial_1 = id|_\Phi$.
On appelle P' la *s-traînée* de Φ, denotée par $P_s(\Phi)$: elle est simplement la traînée obtenue en ne considérant que les sommets dont les étiquettes sont $\leq s$.

Remarque 7.1 Si $|V| = n$, les étiquetages $\partial_n\Phi$ et $\partial_{n-1}\Phi$ diffèrent au plus sur les sommets v_{k-1}, v_k et sur le sommet étiqueté par n.

Exemple

$(G, \partial_5\Phi)$



Pour un étiquetage Φ de G, soit

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \Phi, \\
\Phi_2 &= \partial_n \Phi_1, \\
\Phi_3 &= \partial_{n-1}(\partial_n \Phi_1), \\
&\dots \\
\Phi_j &= \partial_{n-j+2} \dots \partial_{n-1}\partial_n \Phi_1 = \partial_{n-j+2}(\Phi_{j-1}) \qquad (7.1) \\
&\dots \\
\Phi_n &= \partial_2 \dots \partial_n \Phi_1. \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

On appellera *évacuation* l'application $\Phi \longrightarrow \Phi_n$.

Théorème 7.2 *L' évacuation est une involution.*

Remarque 7.3 Ce Théorème étend un résultat de Schützenberger: il a introduit la notion d'évacuation d'un tableau de Young dans [Sch2] et celle d'un ensemble partiellement ordonné dont l'étiquetage est naturel (dans le sens que si $a < b$ dans l'ordre partiel, alors $\Phi(a) < \Phi(b)$ dans les nombres naturels, i.e. Φ est un morphisme d'ordres partiels) et il a montré que cette construction est une involution. Il faut noter que sa définition est un peu différente de la nôtre, mais on peut se convaincre facilement qu'elles sont équivalentes. Par exemple, sa définition de promotion s'obtient de celle qu'on vient de décrire si on ajoute 1 aux membres droits des égalités (i) et (ii), et si on omet l'égalité (iii) (de sorte que $\partial\Phi$ est défini sur $V \setminus \{v_k\}$): on peut dire dans ce cas que la promotion consiste à faire glisser les étiquettes le long de la traînée. D'autres variantes ont étés formulées par Knuth (voir [K], pages 57-59 et ex. 30 page 72), Greene et Edelman (section 5 dans [EG]), Haiman (section 4 dans [H]).

La démonstration du Théorème devient très simple, une fois qu'on utilise des opéra-teurs, introduits par Haiman dans le cas des ensembles partiellement ordonnés à étiquetage naturel (voir [H], preuve du Lemme 2.7).

Pour $1 \leq i \leq n-1$, soit r_i l'opérateur qui échange les étiquettes i et $i+1$ si et seulement si les sommets correspondant ne sont pas adjacents, c'est-à-dire:

$$r_i \Phi = \begin{cases} \Phi & \text{si } (\Phi^{-1}(i), \Phi^{-1}(i+1)) \in E \\ (i, i+1) \circ \Phi & \text{sinon} \end{cases}$$

où $(i, i+1)$ est, comme d'habitude, la transposition du groupe symétrique.

Remarque 7.4 Il est facile de voir que $r_i^2 = id$ et que $|i-j| \geq 2$ implique $r_i r_j = r_j r_i$.

La promotion alors s'exprime tout simplement comme un produit des r_i, comme l'on voit dans le Lemme suivant qui nous a été suggéré par la preuve du Lemme 2.7 dans [H] .

Lemme 7.5 $\partial_n \Phi = r_{n-1} \partial_{n-1} \Phi = r_{n-1} r_{n-2} \ldots r_1 \Phi$.

Dém. On procède par récurrence, le cas $n = 1$ étant trivial. Soit $n > 1$, $P(\Phi) = (v_1, \ldots, v_k)$ et $\overline{v} = \Phi^{-1}(n)$. On a déjà remarqué que $\partial_n(\Phi)$ et $\partial_{n-1}(\Phi)$ peuvent différer seulement sur les éléments v_k, v_{k-1} et $\overline{v}$ de V. Il faut considérer les deux cas suivants:

(i) $\overline{v} \in P(\Phi)$: dans ce cas, puisque la suite d' entiers $(\Phi(v_1), \ldots, \Phi(v_k))$ est croissante, il résulte $\overline{v} = v_k$. On a:

$$\begin{aligned} &\partial_n \Phi(v_{k-1}) = \Phi(v_k) - 1 = \Phi(\overline{v}) - 1 = n - 1 = \partial_{n-1} \Phi(v_{k-1}); \\ &\partial_n \Phi(v_k) = n = \partial_{n-1} \Phi(v_k). \end{aligned}$$

Il en découle que r_{n-1} est l'identité sur l'étiquetage $\partial_{n-1}\Phi$, car $(v_{k-1}, v_k) \in E$ et dans $\partial_{n-1}\Phi$ les sommets v_{k-1}, v_k sont étiquetés respectivement par $n-1$ et n. Donc $\partial_n \Phi = \partial_{n-1} \Phi = r_{n-1} \partial_{n-1} \Phi$.

(ii) $\overline{v} \notin P(\Phi)$: si on utilise la définition de la promotion ∂ on obtient:

$$\partial_n\Phi(\overline{v}) = n-1 \qquad \partial_{n-1}\Phi(\overline{v}) = n$$
$$\partial_n\Phi(v_k) = n \qquad \partial_{n-1}\Phi(v_k) = n-1$$
$$\partial_n\Phi(v_{k-1}) = \Phi(v_k) - 1 = \partial_{n-1}\Phi(v_{k-1})$$

Comme la trajectoire canonique se termine à v_k, nécessairement $(\overline{v}, v_k) \notin E$; alors r_{n-1} agit sur l'étiquetage $\partial_{n-1}\Phi$ comme la transposition $(n-1, n)$, et on a encore $r_{n-1}\partial_{n-1} = \partial_n$. Si on se rappelle que $\partial_1 = id$, la deuxième égalité du Lemme suit immédiatement. □

Pour alléger les notations, on définit $c_1 = id$ et pour $j \geq 2$ soit $c_j = r_{j-1}r_{j-2}\dots r_1$. Alors

$$\partial_j\Phi = c_j\Phi. \tag{7.3}$$

Nous avons aussi $c_j = r_{j-1}c_{j-1}$ et les commutations suivantes sont vérifiées:

$$r_k c_j = c_j r_k \qquad \text{si } k \geq j+1. \tag{7.4}$$

Dém. du Théorème 7.2 Si on dénote par $\Psi = \Phi_n$ l'étiquetage qu'on obtient après l'évacuation de Φ, alors , par le Lemme 7.5 et (7.2) on peut écrire $\Psi = c_1c_2\dots c_n\Phi$. On veut montrer que

$$\partial_1 \dots \partial_n \Psi = \Phi,$$

c'est-à-dire

$$c_1 \dots c_n = c_n^{-1} \dots c_1^{-1}. \tag{7.5}$$

Pour $n = 1$ cette égalité est évidente. Si $n > 1$, on a

$$\begin{aligned} c_1c_2\dots c_n &= c_1(r_1c_1)(r_2c_2)\dots(r_{n-1}c_{n-1}) \\ \text{(par les commutations (7.4))} \quad &= (r_1\dots r_{n-1})(c_1\dots c_{n-1}) \\ \text{(par récurrence)} \quad &= c_n^{-1}c_{n-1}^{-1}\dots c_1^{-1}. \ \square \end{aligned}$$

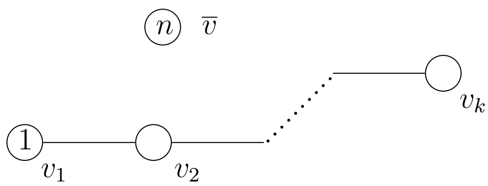
Comme on a fait pour la promotion, les $\{r_i\}$ permettent de trouver une jolie expression pour la traînée de Φ.

Lemme 7.6

$$\begin{aligned} P(\Phi) &= \{\Phi^{-1}(1), (r_1\Phi)^{-1}(2), \ldots, (r_{n-1}\ldots r_1\Phi)^{-1}(n)\} \\ &= \{(c_1\Phi)^{-1}(1), (c_2\Phi)^{-1}(2), \ldots, (c_n\Phi)^{-1}(n)\}. \end{aligned}$$

Dém. On démontre le Lemme par récurrence sur n, et en même temps on prouve que si $P(\Phi) = \{v_1, \ldots, v_k\}$ comme dans la définition , alors $v_k = (c_n\Phi)^{-1}(n)$. Le cas $n = 1$ est évident. Si $n > 1$, soit $\overline{v} = \Phi^{-1}(n)$, et soit $G' = (V', E')$ le graphe qu'on obtient de G en enlevant le sommet $\overline{v}$ et les arêtes qui le contiennent , avec l'étiquetage $\Phi' = \Phi|_{V'}$: on appliquera alors l' hypothèse de récurrence à Φ'. On note que $\overline{v} = (c_{n-1}\Phi^{-1})(n)$, parce que l'opérateur $c_{n-1} = r_{n-2}\ldots r_1$ n'agit pas sur le sommet étiqueté par n. On a alors deux cas:

(*i*) $\overline{v} \notin P(\Phi)$:



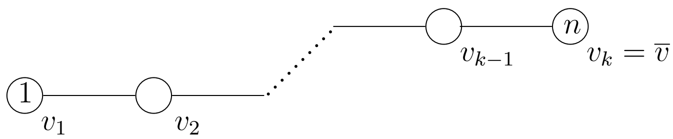
Il est clair que $P(\Phi) = P(\Phi')$ et par récurrence on a

$$P(\Phi') = \{(c_1\Phi)^{-1}(1), (c_2\Phi)^{-1}(2), \ldots, (c_{n-1}\Phi)^{-1}(n-1)\},$$

où $v_k = (c_{n-1}\Phi)^{-1}(n-1)$. On note que $(v_k, \overline{v}) \notin E$, donc r_{n-1} échange les étiquettes n et $n-1$ des sommets $\overline{v}$ et v_k, de sorte que $(c_n\Phi)^{-1}(n) = (r_{n-1}c_{n-1}\Phi)^{-1}(n) = v_k$ (par hypothèse de récurrence) et

$$P(\Phi) = \{(c_1\Phi)^{-1}(1), (c_2\Phi)^{-1}(2), \ldots, (c_n\Phi)^{-1}(n)\}.$$

(ii) $\overline{v} \in P(\Phi)$:



Dans ce cas on a $P(\Phi) = P(\Phi') \cup \{\overline{v}\}$. D'abord, on remarque que ∂_{n-1} n'agit pas sur le sommet $\overline{v}$, donc par (7.3) on a $c_{n-1}\Phi(\overline{v}) = n$. Ensuite par récurrence on obtient $(c_{n-1}\Phi')^{-1}(n-1) = v_{k-1}$. De plus, Φ et Φ' coïncident sur v_{k-1}, donc $n-1 = c_{n-1}\Phi'(v_{k-1}) = c_{n-1}\Phi(v_{k-1})$: il s'ensuit que r_{n-1} est l'identité sur l'étiquetage $c_{n-1}\Phi$, puisque $(v_{k-1}, \overline{v}) \in E$; ainsi $(r_{n-1}c_{n-1}\Phi(\overline{v}) = c_n\Phi(\overline{v}) = n$, donc $\overline{v} = (c_n\Phi)^{-1}(n)$ comme voulu. $\square$

Remarque 7.7 Dans le Lemme 7.6, la traînée $P(\Phi)$ est un multi-ensemble qui contient n éléments.

Reprenons la définition de $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ plus haut. Nous appelons *q-ième traînée* dans l'evacuation de Φ la $(n-q+1)$-traînée de Φ_q, c'est-à-dire, avec les notations précedentes, $P_{n-q+1}(\Phi_q)$. Par le Lemme 7.6, on trouve:

$$\begin{aligned} P_{n-q+1}(\Phi) &= \{(c_1\Phi_q)^{-1}(1), (c_2\Phi_q)^{-1}(2), \ldots, (c_{n-q+1}\Phi_q)^{-1}(n-q+1)\} \\ &= \{(c_j\Phi_q)^{-1}(j)\}_{1 \leq j \leq n-q+1}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Nous allons introduire la notion de trajectoire. Dans Schützenberger [Sch2], la trajectoire dans Φ d'un entier $i \in [n]$ est l'ensemble des sommets qui ont été étiquetés par cet entier au cours de l' évacuation. Dans notre version de la promotion, il ne faut pas oublier que, à chaque promotion successive, l'entier j devient $j-1$, pour $j \geq 2$ (voir la Remarque 7.3). Ceci justifie la définition suivante.

La *trajectoire* de q dans l'évacuation de Φ est le multi-ensemble:

$$\begin{aligned} T_q(\Phi) &= \{\Phi_1^{-1}(q), \Phi_2^{-1}(q-1), \ldots, \Phi_q^{-1}(1)\} \\ &= \{\Phi_{q-j+1}^{-1}(j)\}_{1 \le j \le q}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Soit Ψ l'étiquetage qu'on obtient après évacuation de Φ: alors , par le Théorème 7.2, Φ est l'étiquetage qu'on obtient après évacuation de Ψ.

Théorème 7.8 *Pour $q = 1, \ldots, n$, la q-ième traînée dans l'evacuation de Φ est égale à la trajectoire de $n - q + 1$ dans l'évacuation de Ψ et vice-versa.*

Dém. Soit

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi, \\ \Psi_2 &= \partial_n \Psi_1, \\ \Psi_3 &= \partial_{n-1}(\partial_n \Psi_1), \\ &\ldots \\ \Psi_j &= \partial_{n-j+2} \ldots \partial_{n-1} \partial_n \Psi, & (7.8) \\ &\ldots \\ \Psi_n &= \partial_2 \ldots \partial_n \Psi_1. & (7.9) \end{aligned}$$

On veut montrer que

$$P_{n-q+1}(\Phi_q) = T_{n-q+1}(\Psi). \tag{7.10}$$

Par (7.6) et (7.7), il suffit de montrer que pour $j = 1, \ldots, n - q + 1$ on a

$$(c_j \Phi_q)^{-1}(j) = (\Psi_{n-q-j+2})^{-1}(j). \tag{7.11}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
&\text{(par (7.8))} & \Psi_{n-q-j+2} &= c_{q+j}c_{q+j+1}\dots c_n\Psi \\
&\text{(par (7.5))} & &= (c_1\dots c_{q+j-1})^2 c_{q+j}\dots c_n\Psi \\
& & &= c_1\dots c_{q+j-1}(c_1\dots c_n\Psi) \\
&\text{(par le Théorème 7.2)} & &= c_1\dots c_{q+j-1}\Phi.
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que pour un étiquetage α de G et $k \neq j-1, j$ on a

$$(r_k\alpha)^{-1}(j) = \alpha^{-1}(j) \tag{7.12}$$

Comme $c_1 \dots c_{j-1}$ est un produit de r_k où $k < j-1$, on déduit que

$$(c_1\dots c_{q+j-1}\Phi)^{-1}(j) = (c_jc_{j+1}\dots c_{q+j-1}\Phi)^{-1}(j).$$

De plus, par la définition (7.1) on a $c_j\Phi_q = c_jc_{n-q+2}\dots c_{n-1}c_n\Phi$. Par conséquent il reste à montrer que pour $1 \le j \le n-q+1$

$$(c_jc_{n-q+2}\dots c_n\Phi)^{-1}(j) = (c_jc_{j+1}\dots c_{q+j-1}\Phi)^{-1}(j). \tag{7.13}$$

Par le Lemme 7.9 qu'on montrera dans la suite, on a

$$c_jc_{n-q+2}\dots c_n = dc_jc_{j+1}\dots c_{q+j-1},$$

où d est un produit de r_k avec $k \ge j+1$. Alors (7.12) implique (7.13). □

Lemme 7.9 *Soit $n \ge 1$, $q \ge 1$ et $1 \le j \le n-q+1$. Alors*

$$c_jc_{n-q+2}\dots c_n = dc_jc_{j+1}\dots c_{q+j-1}, \tag{7.14}$$

où d est un produit de r_k avec $k \ge j+1$.

Dém. Par récurrence sur $n+2-q-j$, cet entier étant la différence des deux premiers indices du membre gauche de (7.14). Si ce nombre est 1, alors $n-q+2 = j+1$ et

$q+j-1=n$, donc l'énoncé est vérifié. Supposons maintenant que $n+2-q-j \geq 2$. Puisque $c_i = r_{i-1}c_{i-1}$ pour $i \geq 2$, on trouve

$$\begin{aligned}
c_j c_{n-q+2} \dots c_n &= c_j(r_{n-q+1}c_{n-q+1}) \dots (r_{n-1}c_{n-1}) \\
\text{(par les commutations (7.4))} \quad &= c_j r_{n-q+1} r_{n-q+2} \dots r_{n-1} c_{n-q+1} c_{n-q+2} \dots c_{n-1} \\
\text{(par (7.4) car } n-q+1 \geq j+1\text{)} \quad &= r_{n-q+1} r_{n-q+2} \dots r_{n-1} c_j c_{n-q+1} c_{n-q+2} \dots c_{n-1} \\
&= r_{n-q+1} r_{n-q+2} \dots r_{n-1} d' c_j c_{j+1} \dots c_{q+j-1},
\end{aligned}$$

où d' est un produit de r_k avec $j+1 \leq k$, par récurrence. Le lemme suit alors du fait que $n-q+1 \geq j+1$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[A] E. Abe, (1980). *Hopf Algebras*, Cambridge University Press.

[BBH] F. Bergeron, N. Bergeron, R.B. Howlett, D.E.Taylor, (1992). A decomposition of the descent algebra of a finite Coxeter group, *Journal of Algebraic Combinatorics*, **1**, 23-44.

[B] N. Bergeron, (1992). A decomposition of the descent algebra of the hyperoctahedral group II, *Journal of Algebra*, **148**, 98-122.

[BK] E. A. Bender, D. E. Knuth, (1972). Enumeration of plane partitions, *Journal of Combinatorial Theory Ser. A*, **13**, 40-54.

[DW] J. Désarménien, M. Wachs, (1988). Descentes des dérangements et mots circulaires, *Actes du 19-ème Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, Pubblications IRMA, Strasbourg, 13-21.

[D] P. Doubilet, (1972). On the foundations of Combinatorial Theory. VII: Symmetric Functions through the theory of distribution and occupancy, *Studies in Applied Mathematics*, **51**, n.4, 377-396.

[EG] P. Edelman, C.Greene, (1987). Balanced Tableaux,*Advances in Mathematics*, **63**, 42-99.

[E] R. Ehrenborg, (1993).On posets and Hopf algebras, manuscript.

[F] H. O. Foulkes, (1980). Eulerian numbers, Newcomb's problem and representations of the symmetric group. *Discrete Mathematics*, bf 30, 3-49.

[GG] A. M. Garsia, I. Gessel, (1970). Permutation statistics and partitions, *Advances in Mathematics*, **31**, 288-305.

[GRem] A. M. Garsia, J. B. Remmel, (1985). Shuffles of permutationsand the Kronecker product, *Graphs and Combinatorics*, **1**, 217-263.

[GReu] A. M. Garsia, C. Reutenauer, (1989). A decomposition of Solomon's Algebra, *Advances in Mathematics*, **77**, 189-262.

[Gei] L. Geissinger, (1977). Hopf algebras of symmetric functions and class functions, in *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique*, Springer Lecture notes in Mathematics, **579**, 168-181.

[Ges] I. Gessel, (1984). Multipartite P-Partitions and inner product of skew Schur functions, in *Combinatorics and Algebra; Contemporary Mathematics*, **34**, 289-301.

[Ges1] I. Gessel, (1990). Quasi-symmetric functions, manuscript.

[GeRe] I. Gessel, C. Reutenauer, (1992). Counting permutations with given cycle structure and descent set, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, à paraître.

[Gor] B. Gordon, (1963). Two theorems on multipartite partitions, *Journal of London Mathematical Society*, **38**, 459-464.

[H] M.D.Haiman, (1989). Dual equivalence with applications, including a conjecture of Proctor, preprint.

[K] D. E. Knuth, (1973). *The Art of Computer Programming*, Vol.**3**, Addison Wesley, Reading.

[K1] D. E. Knuth, (1970). A note on solid partitions, *Math. Comp.*, **24**, 955-962.

[K2] D. E. Knuth, (1970). Permutation matrices and generalized Young tablaux, *Pacific Journal of Mathematics*, **34**, 709-727.

[LS] A. Lascoux, M.- P. Schützenberger, (1981). Le monoïde plaxique, in *Non commutative structures in algebra and geometric combinatorics, Quaderni de "La ricerca scientifica"* C.N.R., **109**.

[Mcd] I.G. Macdonald, (1979). *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press, New York.

[Mcm] P. A. MacMahon, (1960). *Combinatorial Analysis*, Chelsea, New York.

[Mal] C. Malvenuto, (1993). P-partitions and the plactic congruence, *Graphs and Combinatorics*, **9** , 63-73.

[MalR] C. Malvenuto, C. Reutenauer, (1992). Evacuation on Labelled Graphs, *Discrete Mathematics*, à paraître.

[ManR] R. Mantaci, C. Reutenauer, (1993). A generalisation of the descent algebra in wreath products, *Communications in Algebra Annals of Mathematics*, à paraître.

[MM] J. Milnor, J. Moore, (1965). On the structure of Hopf algebras, *Annals of Mathematics*, **81**, 211-264.

[Mos] P. Moszkowski, (1989). Généralisation d' une formule de Solomon relative à l'anneau d' un groupe de Coxeter, *Comptes Rendus Académie des Sciences Paris I*, **309**, 539-541.

[P] F. Patras, (1993). L'algèbre des descentes d'une bigèbre graduée, pre-print, Max-Planck Institute, Bonn.

[Rad] D. E. Radford, (1979). A natural ring basis for the shuffle algebra and an application to group schemes, *Journal of Algebra*, **58**, 432-454.

[Reu] C. Reutenauer, (1993). *Free Lie Algebras*, Clarendon Press, Oxford.

[Sch1] M.- P. Schützenberger, (1976). Evacuations, dans *Colloquio Internazionale Teorie Combinatorie, Tomo I, Atti dei Convegni Lincei*, **17**, Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, 257-264.

[Sch2] M.- P. Schützenberger, (1963). Quelques remarques sur une construction de Schensted, *Math. Scand.*, **12**, 117-128.

[Sch3] M.- P. Schützenberger, (1972). Promotion des morphismes d'ensembles ordonnés, *Discrete Mathematics*, **2**, 73-94.

[Sol] L. Solomon, (1976). A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group, *J. Algebra*, **41**, 255-264.

[Sta] R.P. Stanley, (1972). Ordered structures and partitions, in *Memoirs of the American Mathematical Society*, **119**.

[Sta1] R.P. Stanley, (1984). On the number of reduced decompositions of elements of Coxeter groups, *European Journal of Combinatorics*, **5**, 359-372.

[Swe] M. Sweedler, (1969). *Hopf Algebras*, W.A. Benjamin, New York.

[Thi] J.-Y. Thibon, (1991). Coproduits de fonctions symétriques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.**312**, Série 1, 553-556.

[Tho] G.P. Thomas, (1977). Frames, Young tableaux and Baxter sequences, *Advances in Mathematics*, **26**, 275-289.

[Z] A.V. Zelevinsky, (1981). *Representations of Finite Classical Groups*, Springer Lecture Notes in Math., **869**.

[Z1] A.V. Zelevinsky, (1981). A generalisation of the Littlewood-Richardson rule and the Robinson-Schensted-Knuth correspondence, *Journal of Algebra*, **69**, 82-94.

INDEX TERMINOLOGIQUE