Secondo Esonero di VARIABILE COMPLESSA - 8 giugno 2015

Esercizio 1

a) Studiare le singolarità isolate al finito di $f(z) = \dfrac{16}{z^3 + 4z^2}$ e calcolarne i residui.

b) Studiare la funzione $f(z)$ in $z = \infty$ e calcolarne il residuo.

c) Determinare gli sviluppi in serie di $f(z)$ nelle seguenti regioni

c1) $0 < |z| < 4$; **c2**) $4 < |z|$; **c3**) $|z - 1| < 1$.

Soluzione a) La funzione f è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0, -4\}$. 0 e -4 sono singolarità isolate. Il punto $z_0 = 0$ è polo del secondo ordine. Infatti

$$\lim_{z\to 0} f(z)z^2 = 4 \neq 0$$

e

$$\mathrm{Res}\,(z, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} f(z)z^2 = -1.$$

Il punto $z_0 = -4$ è un polo del primo ordine dato che

$$\lim_{z\to -4} f(z)(z + 4) = 1.$$

Il valore del limite fornisce anche il residuo $\mathrm{Res}\,(z, -4) = 1$.

b) $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta) = \frac{16\zeta^3}{4\zeta+1}$ ha in $\zeta = 0$ uno zero del terzo ordine. Quindi f ha in $z = \infty$ uno zero del terzo ordine. Se $z = \infty$ è uno zero di ordine maggiore di 1 allora $\mathrm{Res}\,(z, \infty) = 0$. Si giungeva alla stessa conclusione ricordando che $\mathrm{Res}\,(z, \infty) + \mathrm{Res}\,(z, 0) + \mathrm{Res}\,(z, -4) = 0$.

c) Si ha

$$\frac{16}{z^3 + 4z^2} = \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z + 4} - \frac{1}{z}$$

Se $|z| < 4$ allora

$$\frac{1}{z + 4} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^k.$$

Se $|z| > 4$ allora

$$\frac{1}{z + 4} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{z}\right)^k.$$

c1) Sia $z : 0 < |z| < 4$ Lo sviluppo di Laurent di f in un intorno incompleto di $z_0 = 0$ è dato da

$$\frac{16}{z^3 + 4z^2} = \frac{4}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^k = \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{4^{k+1}}.$$

c2) Sia $z:\ 4<|z|$. Lo sviluppo di Laurent di f in un intorno incompleto del punto ∞ è dato da

$$\frac{16}{z^3+4z^2}=\frac{4}{z^2}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{z}\right)^k=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-4)^k}{z^{k+1}}=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-4)^{k-1}}{z^k}.$$

c3) Sia $z:\ |z-1|<1$. La funzione f è olomorfa in $|z-1|<1$ quindi la serie richiesta è la serie di Taylor centrata in 1. Si ottiene osservando che, in questo insieme,

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k;$$

$$\frac{1}{z^2}=-\frac{d}{dz}\frac{1}{z}=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k\,(z-1)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\,(z-1)^k;$$

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{5+(z-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{5^{k+1}}.$$

Quindi, in $|z-1|<1$ si ha

$$\frac{16}{z^3+4z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(4k+3+\frac{1}{5^{k+1}}\right)(z-1)^k.$$

Esercizio 2 Determinare e classificare le singolarità isolate di

$$f(z) = \frac{1}{(\pi z - 2)\cos(1/z)}.$$

Calcolare

$$\int_{+\partial D} f(z)dz, \qquad D = \{z : |z + 2/\pi| \leq 1/\pi\}.$$

Soluzione Posto $z_k = 2/((2k+1)\pi)$, la funzione $f(z)$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0, z_k, k \in \mathbb{Z}\}$. $z = 0$ non è una singolarità isolata dato che $z_k \to 0$ per $k \to \infty$. $z_0 = 2/\pi$ è uno zero del secondo ordine per $1/f$, quindi un polo del secondo ordine per f, come segue dall'essere

$$\lim_{z \to 2/\pi} f(z)(z - 2/\pi)^2 = \lim_{z \to 2/\pi} \frac{1}{(\pi z - 2)\cos(1/z)}(z - 2/\pi)^2 = \frac{4}{\pi^3} \neq 0.$$

I punti z_k, $k \neq 0$, sono zeri del primo ordine per $1/f$, quindi poli del primo ordine per f, come segue dall'essere

$$\lim_{z \to z_k} f(z)(z - z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{(z - z_k)}{(\pi z - 2)\cos(1/z)} =$$

$$\lim_{z \to z_k} \frac{(z - z_k)}{(\pi z - 2)(\cos(1/z) - \cos(1/z_k))} = \frac{1}{(\pi z_k - 2)(1/z_k^2)\sin(1/z_k)} = \frac{(-1)^k z_k^2}{(\pi z_k - 2)}.$$

L'unica singolarità di f che cade in D è $z_{-1} = -2/\pi$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{+\partial D} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -\frac{2}{\pi}).$$

Dalla discussione precedente si ha che

$$Res(f, z_k) = \frac{(-1)^k z_k^2}{(\pi z_k - 2)}, \qquad k \neq 0.$$

Quindi

$$\operatorname{Res}(f, z_{-1}) = \frac{1}{\pi^2}.$$

L'integrale richiesto vale $2i/\pi$.

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+1)^2} dx.$$

Soluzione Sia $f(z) = \dfrac{e^{3iz}}{(z^2+1)^2}$. La funzione è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Posto $D_R = \{z : |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $R > 1$, solo il punto i cade all'interno di D_R. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_{+\partial D_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

$z = i$ è un polo del secondo ordine per f dato che

$$\lim_{z \to i} f(z)(z-i)^2 = \lim_{z \to i} \frac{e^{3iz}}{(z+i)^2} = -\frac{e^{-3}}{4}.$$

Il residuo è dato da

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \frac{e^{3iz}}{(z+i)^2} = -\frac{i}{e^3}.$$

Quindi

$$\int_{+\partial D_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2+1)^2} dz = \frac{2\pi}{e^3}.$$

Quindi

$$\int_{+\Gamma_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2+1)^2} dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{3ix}}{(x^2+1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3}$$

Sono verificate le ipotesi del Lemma di Jordan (controllate!). Quindi si ha

$$\lim_{R \to \infty} \int_{+\Gamma_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2+1)^2} dz = 0.$$

Otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{(x^2+1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3}.$$

Separando parte reale e immaginaria

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3}.$$

Esercizio 4

a) Determinare il numero di zeri di $z^4 + z^3 - 4z + 1$ che cadono nella corona circolare $1 < |z| < 3$.

b) Calcolare

$$\int_{+\partial D} \frac{4z^3 + 3z^2 - 4}{z^4 + z^3 - 4z + 1} dz, \qquad D = \{z : |z| \leq 1\}.$$

Soluzione Posto $f(z) = -4z$ e $g(z) = z^4 + z^3 + 1$ si ha

$$|g(z)| \leq 3 < 4 = |f(z)|, \qquad \forall z : |z| = 1.$$

Per il Lemma di Rouchè f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri in $|z| < 1$ cioè uno.

Posto $f(z) = z^4$ e $g(z) = z^3 - 4z + 1$ si ha

$$|g(z)| \leq |z|^3 + 4|z| + 1 = 40 < 81 = |z|^4, \qquad \forall z : |z| = 3.$$

Per il Lemma di Rouchè f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri in $|z| < 3$ cioè quattro.

Quindi il numero di zeri di $z^4 + z^3 - 4z + 1$ che cadono nella corona circolare $1 < |z| < 3$ sono $4 - 1 = 3$.

Per il teorema dell'indicatore logaritmico

$$\int_{+\partial D} \frac{4z^3 + 3z^2 - 4}{z^4 + z^3 - 4z + 1} dz = 2\pi i\, n_1$$

dove n_1 indica gli zeri di $z^4 + z^3 - 4z + 1$ in $|z| < 1$. Per **a)** si ha $n_1 = 1$ e l'integrale richiesto vale $2\pi i$.