Primo Esonero di VARIABILE COMPLESSA - 24 aprile 2015

Esercizio 1 Determinare l'insieme di olomorfia della funzione

$$f(z) = (z^2 + 4)^z$$

ove si assume la determinazione principale della potenza. Calcolare $f(i)$ e $|f(i)|$.

Soluzione Si ha

$$(z^2+4)^z = \begin{cases} e^{z \log(z^2+4))} & z \neq \pm 2\, i \\ 0 & z = \pm 2\, i \end{cases}$$

con log determinazione principale del logaritmo. Quindi il campo di olomorfia coincide con quello di $\log(z^2 + 4)$ ed è dato da

$$\mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Im}\,(z^2 + 4) = 0, \mathrm{Re}\,(z^2 + 4) \leq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Re}\, z = 0, |\mathrm{Im}\, z| \geq 2\}.$$

Si ha $f(i) = e^{i \log 3} = \cos\log 3 + i \sin\log 3$ e $|f(i)| = 1$.

Esercizio 2 Sia γ la circonferenza del piano complesso $|z-4| = 2$, orientata positivamente in verso antiorario.

Calcolare i seguenti integrali

$$a) \quad \int_{+\gamma} \frac{\sin z}{(z-\pi)^2} dz; \quad b) \quad \int_{+\gamma} \frac{\sin z}{(z+\pi)^2} dz; \quad c) \quad \int_{+\gamma} \frac{\sqrt{z}\, \cos z}{z - \pi} dz$$

assumendo in c) la determinazione principale della radice .

Soluzione esercizio 2 a) Sia $D = \{z : |z - 4| \leq 2\}$. La funzione $\sin z$ è olomorfa in tutto il piano complesso quindi, in particolare, olomorfa in $D \setminus \partial D$ e continua in D. Dall'essere $\pi \in D \setminus \partial D$ possiamo applicare il secondo teorema integrale di Cauchy (formula per le derivate) a $f(z) = \sin z$ in D e ottenere

$$\int_{+\gamma} \frac{\sin z}{(z-\pi)^2} dz = 2\pi i f'(\pi) = -2\pi i.$$

b) Sia $D = \{z : |z - 4| \leq 2\}$. La funzione $f(z) = \sin z/(z + \pi)^2$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{-\pi\}$ quindi, in particolare, è olomorfa in $D \setminus \partial D$ e continua in D. Dal primo teorema integrale di Cauchy l'integrale richiesto è zero.

c) Il campo di olomorfia di $\sqrt{z}$ coincide con quello di $\log z$ (determinazione principale); $\cos z$ è una funzione intera. Quindi $f(z) = \sqrt{z}\, \cos z$

è olomorfa in $A = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$. Sia, come prima, $D = \{z : |z-4| \leq 2\}$. Dato che $D \subset A$, f è olomorfa in $D \setminus \partial D$ e continua in D. Dall'essere $\pi \in D \setminus \partial D$ applichiamo il secondo teorema integrale di Cauchy alla funzione $f(z)$ nel dominio D e otteniamo

$$\int_{+\gamma} \frac{\sqrt{z}\,\cos z}{z-\pi} dz = 2\pi i f(\pi) = -2\pi i \sqrt{\pi}.$$

Esercizio 3 Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \log(1+\frac{1}{k}) z^{3k}.$$

a) Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze e studiare la convergenza della serie nel campo di convergenza.

b) Studiare il comportamento della serie di potenze sulla frontiera del campo di convergenza.

Soluzione Con il cambio di variabile $w = -z^3$ ci riconduciamo allo studio della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{k}) w^k, \qquad a_k = \log(1+\frac{1}{k}). \tag{1}$$

a) Il raggio di convergenza della serie (1) è $R = 1$ come segue dal criterio del rapporto:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\log(1+1/k)}{1+1/k} \frac{(1+1/(k+1))}{\log(1+1/(k+1))} \frac{1+1/k}{1+1/(k+1)}\right| = 1.$$

Quindi anche la serie iniziale ha raggio di convergenza $R = 1$. Dal teorema di Cauchy Hadamard:

la serie converge assolutamente in ogni punto z tale che $|z| < 1$;

la serie converge totalmente (e quindi uniformemente) in $\{z : |z| \leq \rho\}$, con $\rho \in (0,1)$;

la serie non converge in z tale che $|z| > 1$.

b) Se $|w| = 1$ è verificata la condizione necessaria per la convergenza.

La successione $a_k = \log(1+\frac{1}{k})$ è monotona decrescente e infinitesima. Quindi si può applicare il teorema di Picard: la serie (1) converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in $\{|w| \leq 1\}$ con distanza positiva da $w = 1$. In $w = 1$ non converge (si comporta come la serie armonica). Se $|w| = 1$ la serie diverge assolutamente (diverge la serie dei moduli).

Tornando alla serie iniziale, tenendo presente che

$$z^3 = -1 \iff z = \{e^{\pi i/3}, e^{\pi i}, e^{\pi i 5/3}\} = \{-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

segue che la convergenza della serie è uniforme in ogni insieme chiuso contenuto in $\{z : |z| \leq 1\}$ con distanza positiva dai punti $e^{\pi i/3}, e^{\pi i}, e^{\pi i5/3}$. La serie non converge in questi punti. La serie diverge assolutamente se $|z| = 1$.

Esercizio 4 Sia

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad u(x, y) = \sin(\alpha y)(e^x - e^{-x}).$$

Determinare per quali valori di α, reali e non nulli, u è la parte reale di una funzione f olomorfa in $\mathbb{C}$. Per ognuno di questi valori:

a) determinare la funzione $f(z)$ per cui $f(0) = -2\alpha i$;

b) determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = -i\alpha(e^z + 2)$.

Soluzione La funzione u ammette coniugata armonica v in $\mathbb{C}$ se e solo se u è armonica. Si ha

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (1 - \alpha^2) \sin(\alpha y)(e^x - e^{-x}) = 0.$$

Quindi i valori cercati sono $\alpha = \pm 1$.

La funzione $f(z) = u + iv$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ se e solo se u e v sono funzioni differenziabili e verificano le condizioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Quindi imponendo le condizioni

$$v_x = -\alpha(e^x - e^{-x}) \cos(\alpha y), \qquad v_y = \sin(\alpha y)(e^x + e^{-x}).$$

troviamo

$$v(x, y) = -\alpha \cos(\alpha y)(e^x + e^{-x}) + c, \qquad \alpha = \pm 1.$$

Ne segue che

$$f = u + iv = -ie^x(\alpha \cos(\alpha y) + i \sin(\alpha y)) - ie^{-x}(\alpha \cos(\alpha y) - i \sin(\alpha y)) + c.$$

$$= \sin(\alpha y)(e^x - e^{-x}) - i\alpha \cos(\alpha y)(e^x + e^{-x}) + c$$

È facile riconoscere che, se $\alpha = 1$

$$f(z) = -i(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}) + c = -2i \cosh z + c;$$

se $\alpha = -1$ allora

$$f(z) = i(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}) + c = 2i \cosh z + c.$$

Quindi $f(z) = -\alpha i(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}) + c = -2\alpha i \cosh z + c$. Imponendo la condizione $f(0) = -2\alpha i$ si trova $c = 0$.

Cerchiamo le soluzioni dell'equazione $f(z) = -i\alpha(\mathrm{e}^z + 2)$ ovvero $\mathrm{e}^{-z} = 2$. Si trovano i valori

$$z = -\log 2 + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$