Lezione 16: La funzione modulo. La composizione

Nelle prossime lezioni richiameremo un po' di "funzioni elementari" insieme ad alcune proprietà generali delle funzioni. Prima di cominciare introduciamo una notazione molto sintetica per alcuni sottoinsiemi della retta reale.

Definizione 117 *Si chiamano* **intervalli** *di* $\mathbf{R}$ *gli insiemi di numeri reali che "stanno tra due numeri reali fissati"*

Figura 84: Un intervallo

Per indicare questi insiemi useremo le seguenti notazioni: fissati due numeri reali a *e* b *(gli* **estremi** *dell'intervallo), con* $a < b$,

$$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} \;:\; a < x < b\}\,, \qquad [a,b] = \{x \in \mathbf{R} \;:\; a \le x \le b\}\,,$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbf{R} \;:\; a < x \le b\}\,, \qquad [a,b) = \{x \in \mathbf{R} \;:\; a \le x < b\}\,,$$

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \;:\; x > a\}\,, \qquad (-\infty,b) = \{x \in \mathbf{R} \;:\; x < b\}\,.$$

Come vedete mettiamo la parentesi tonda per dire che l'estremo corrispondente non è compreso nell'intervallo, mentre usiamo la parentesi quadra per intendere che nell'intervallo c'è anche l'estremo. Analogamente è facile capire cosa intendiamo con $[a,+\infty)$ e $(-\infty,b]$, cioè le due semirette, destra e sinistra, compresi gli estremi. In generale gli intervalli del tipo (a,b), $(a,+\infty)$ e $(-\infty,b)$ vengono detti **intervalli aperti**, mentre quelli del tipo $[a,b]$, $[a,+\infty)$ e $(-\infty,b]$ vengono detti **intervalli chiusi**.

Quindi, per esempio, l'insieme $\{x \in \mathbf{R} \;:\; -1 < x \le 4\}$, cioè l'insieme di tutti i numeri reali maggiori di -1 e minori o uguali a 4, verrà indicato con...? ...$(-1,4]$.

La funzione modulo

Abbiamo visto nella prima lezione cosa intendiamo con il modulo di un numero reale:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ -x & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

cioè il modulo di un numero reale lascia invariato il numero se questo è positivo e gli cambia segno se il numero è negativo (cioè è "la distanza tra l'origine e il punto che rappresenta il numero sull'asse reale").

Consideriamo ora la **funzione modulo,** $f(x) = |x|$, cioè della funzione che a ogni x associa il modulo di x. Cosa possiamo dire di questa?

Ovviamente il suo dominio è tutto l'asse reale,

$$\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$$

(infatti possiamo fare il modulo di ogni numero reale).

E l'immagine?...Per definizione il modulo è sempre positivo, quindi è chiaro che $\operatorname{Im} f = \{x \in \mathbf{R} \,:\, x \geq 0\}$, che usando le notazioni per gli intervalli possiamo scrivere

$$\operatorname{Im} f = [0, +\infty)\,.$$

E il grafico?...Basta guardare la definizione. Per le x positive $f(x) = x$, quindi se guardiamo solo il semipiano delle x positive il grafico sarà dato dalla retta $y = x$ (attenzione: solo la parte che sta in quel semipiano! Cioè solo la bisettrice del primo quadrante). Mentre nel semipiano delle x negative il grafico sarà dato dal ramo di retta di equazione $y = -x$ che sta nel secondo quadrante

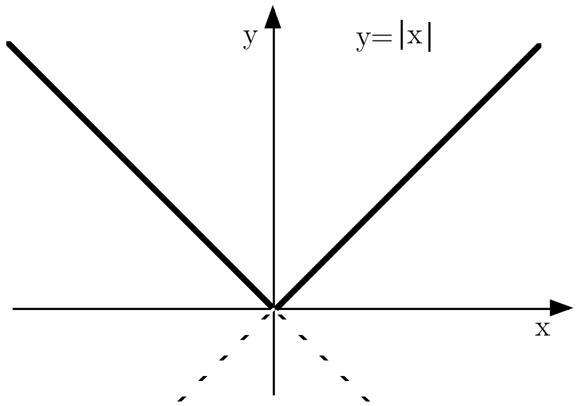

Figura 85: Il grafico della funzione modulo di x

Esempio 118 Proviamo ora a disegnare il grafico di $f(x) = |x + 3|$. Per definizione si ha

$$f(x) = |x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x+3 \geq 0 \\ -x-3 & \text{se } x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x < -3. \end{cases}$$

Quindi nel semipiano delle $x \geq -3$, vediamo il grafico della retta $y = x + 3$:

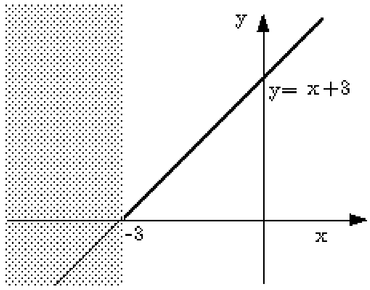

Figura 86: Questa è la parte che vediamo “coprendo” il semipiano delle x minori di -3

Ovviamente se “copriamo” l’altro semipiano, vediamo solo il grafico della retta di equazione $y = -x - 3$

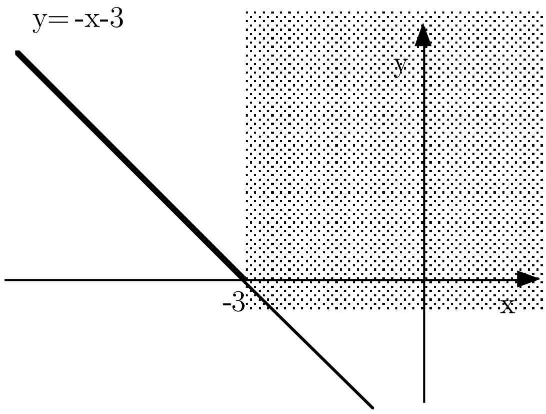

Figura 87: Questa è quello che vediamo nel semipiano delle x minori di -3

E quindi mettendo insieme queste due parti del grafico si ha

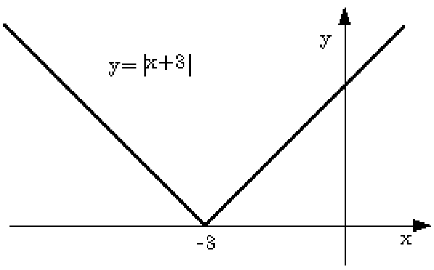

Figura 88: Il grafico di $f(x) = |x + 3|$.

Notate che avremmo potuto disegnare molto facilmente questo grafico traslando il grafico di $|x|$ di 3 unità verso sinistra (cioè mettendo il punto del grafico che prima corrispondeva all’origine, nel punto -3).

Esempio 119 Proviamo ora a disegnare il grafico della funzione $f(x) = |x^2-4|$. Non ci crederete, ma abbiamo già tutte le informazioni necessarie per disegnarlo. Scriviamolo esplicatamente

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x^2 - 4 \geq 0 \\ \\ 4 - x^2 & \text{se } x^2 - 4 < 0. \end{cases}$$

Quindi il grafico è dato o dalla parabola $y = x^2 - 4$ o dalla parabola $y = 4 - x^2$ a seconda che $x^2 - 4$ sia positivo o negativo. Il problema è completamente risolto una volta che sappiamo dire qual'è il segno di $x^2 - 4$ al variare di x. E noi questo lo sappiamo fare, vero? Altrimenti sarebbe bene dare una ripassatina alle disequazioni elementari (tipo: disequazioni di primo e secondo grado, fratte, sistemi di disequazione, ecc...). Tornando al nostro problema: $y = x^2 - 4$ è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto,

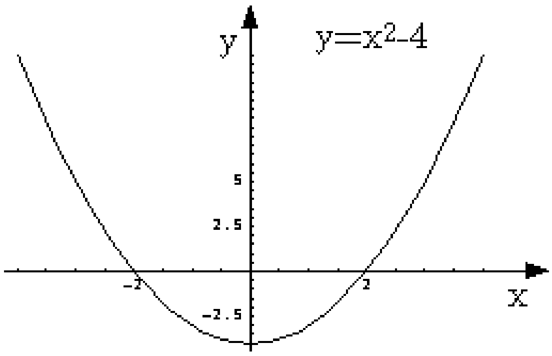

Figura 89: Parabola $y = x^2 - 4$.

quindi $x^2 - 4$ tra le due radici è negativo e fuori dalle radici è positivo, cioè

$$x^2 - 4 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leq -2 \text{ o } x \geq 2$$

mentre

$$x^2 - 4 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-2, 2)\,.$$

Quindi fuori dalle radici il grafico della nostra funzione sarà proprio il grafico della parabola della figura 89, mentre tra le due radici sarà il grafico della parabola $y = 4 - x^2$

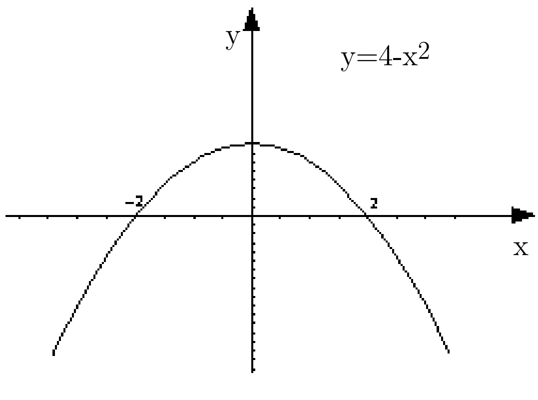

Figura 90: Parabola $y = 4 - x^2$.

In conclusione il grafico che dovevamo disegnare è:

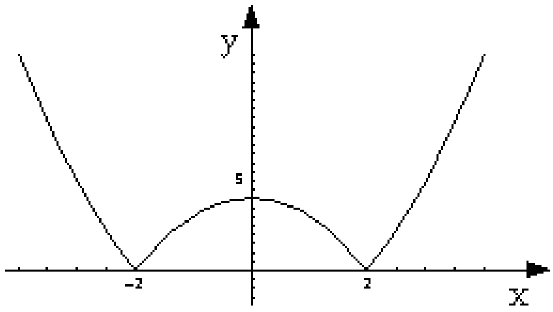

Figura 91: Grafico della funzione $f(x) = |x^2 - 4|$.

NOTA: Avremmo potuto disegnare questo grafico molto rapidamente semplicemente "manipolando" il grafico della parabola.

Vediamo infatti come possiamo disegnare il grafico della funzione $|f(x)|$ conoscendo il grafico di $f(x)$. Prendiamo il grafico di una funzione $f(x)$ qualsiasi

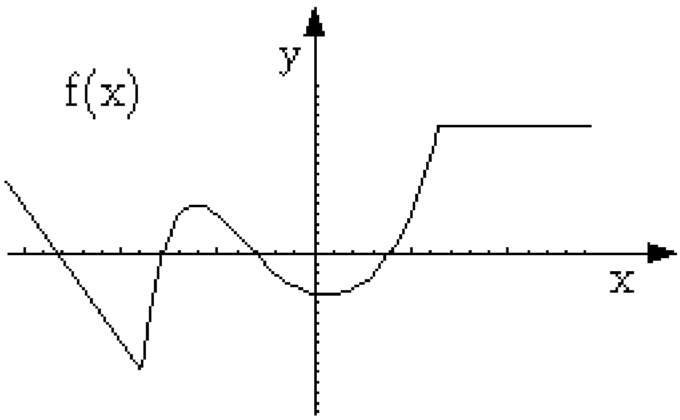

Figura 92: Grafico di una funzione di cui faremo il modulo.

Se consideriamo la funzione $|f(x)|$, questa sarà uguale a $f(x)$ per tutte le x per cui f è positiva mentre cambierà il segno nei punti in cui f è negativa. Un primo passo è quindi disegnare il grafico di $-f$ a partire dal grafico di f.

Pensiamoci un attimo, come è fatto il grafico di $-f(x)$? A ogni punto x del dominio di f, invece di associargli la quota $y = f(x)$ devo associargli la quota $y = -f(x)$, quindi il punto del grafico di $-f$, $(x, -f(x))$, rispetto al punto $(x, f(x))$ del grafico di f sta alla stessa distanza dall'asse x ma dal lato opposto. In conclusione **il grafico di $-f$ si ottiene dal grafico di f ribaltandolo rispetto all'asse x.**

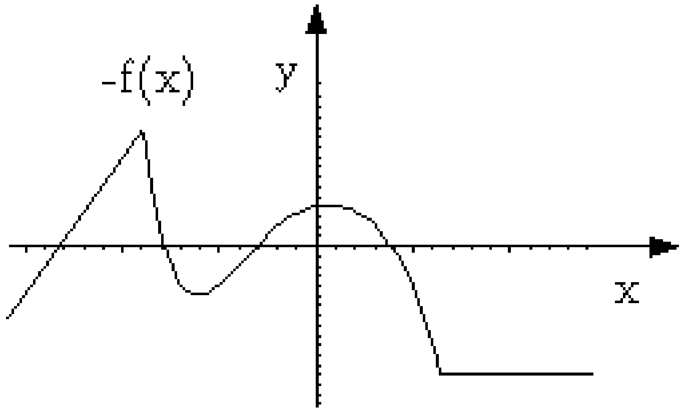

Figura 93: Grafico di $-f$.

A questo punto per disegnare il grafico di $|f(x)|$ basta predere f nella zona dove f è positiva e $-f$ nella zona dove f è negativa

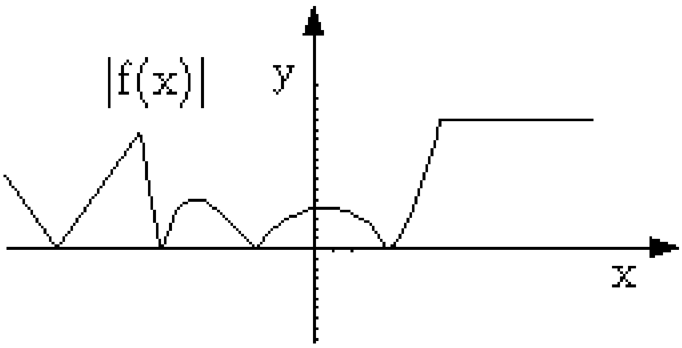

Figura 94: Grafico di $|f(x)|$.

CHIARO?
In sostanza per ottenere **il grafico di $|f|$ basta prendere le parti del grafico di f che stanno nel semipiano delle y negative e ribaltarle rispetto all'asse x.** Molto facile!

Esempio 120 Disegnamo il grafico della funzione $f(x) = ||x| - 1|$. Facciamolo in vari passi: questa funzione prende x, gli fa il modulo, gli toglie 1 e poi rifà il modulo. Allora il primo passo già lo conosciamo, il grafico del modulo che abbiamo disegnato poco fa. Il secondo passo è cercare di disegnare il grafico di $|x| - 1$. Ma questo è ottenuto dal grafico del modulo, traslandolo di 1 verso il basso. Infatti invece di essere dato dalle coppie $(x, |x|)$ è dato dalle coppie $(x, |x| - 1)$

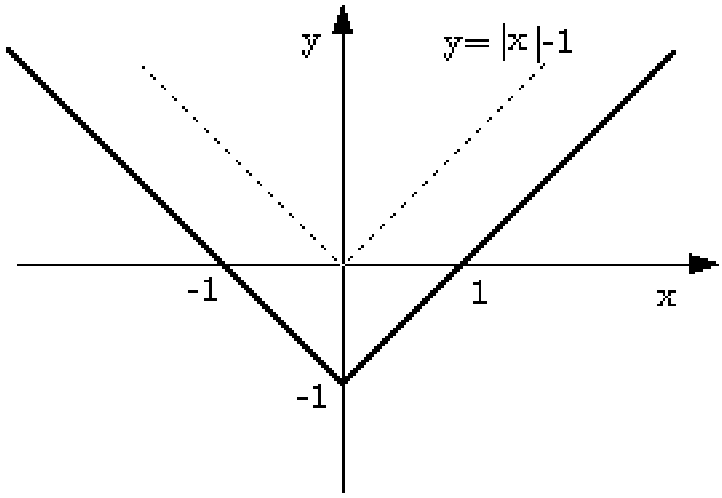

Figura 95: Il grafico di $|x| - 1$ è ottenuto dal grafico di $|x|$ traslato verso il basso.

A questo punto, per ottenere il modulo di $|x| - 1$ basta ribaltare rispetto all'asse delle x la parte di grafico che sta nel semipiano delle y negative

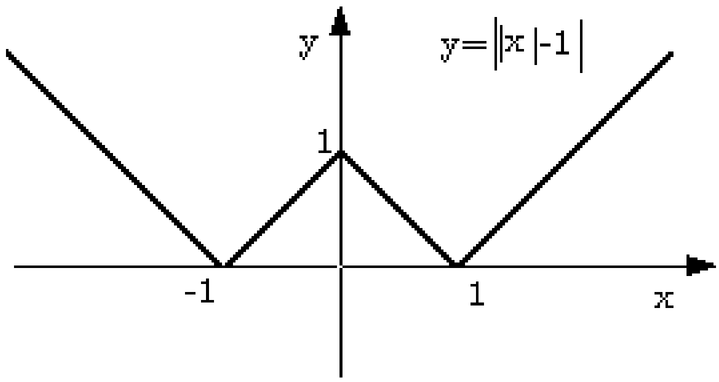

Figura 96: Il grafico di $||x| - 1|$.

Finora l'unica "nuova" funzione che abbiamo definito è la funzione modulo (gli abbiamo dato un nome e un simbolo), tutte le altre le abbiamo ottenute "manipolando" le funzioni già note. In particolare nell'ultimo esempio abbiamo usato due volte la funzione modulo.

Funzioni composte

Abbiamo detto che una funzine f è una legge che a ogni elemento di un insieme A (il dominio di f) associa un solo elemento di un insieme B (l'immagine di f). Ora supponiamo di avere un'altra legge che a ogni elemento di B (o a un sottoinsieme di questo) associa un solo elemento di un terzo insieme C.

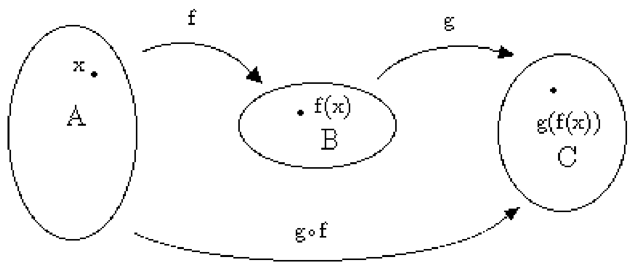

Figura 97: Composizione di due funzioni.

Queste due leggi "messe insieme" ci permettono di associare a ogni elemento di A un solo elemento di C, ossia ci da una "nuova legge".

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x))$$

$$x \longrightarrow g(f(x))\,.$$

Questa nuova funzione si chiama **funzione composta** e si indica con $g \circ f$ ($(g \circ f)(x) = g(f(x))$).

Esempio 121 1. La legge f associa a ogni studente un numero di matricola;

2. La legge g associa a ogni numero di matricola un corso di laurea;

3. La legge $g \circ f$ associa a ogni studente un corso di laurea.

Esempio 122 In un certo senso usiamo già la nozione di funzione composta quando applichiamo il teorema di Pitagora per dedurre la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 1 e x

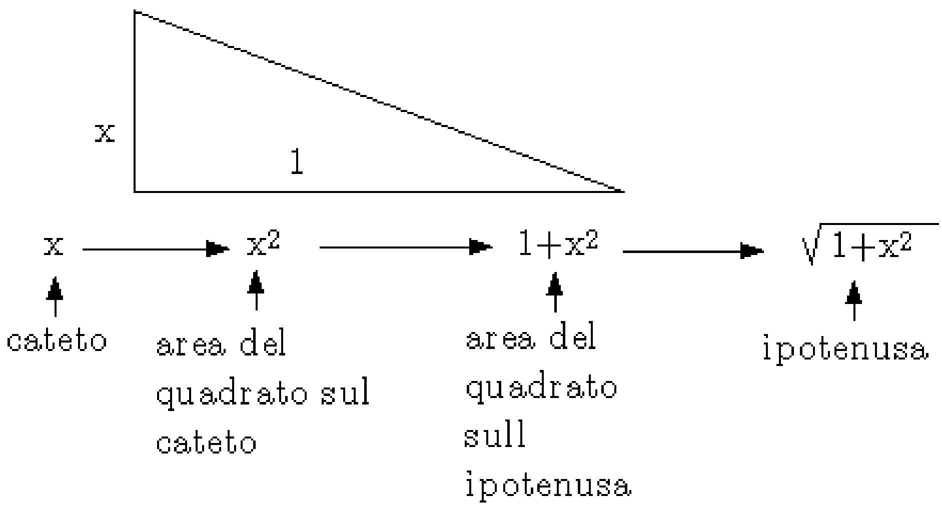

Figura 98: Ancora il teorema di Pitagora...

Quindi se per esempio $f(x) = 1 + x^2$ (cioè la funzione che prende un numero reale gli fa il quadrato e gli somma uno, cioè associa alla lunghezza del cateto x l'area del quadrato sull'ipotenusa), mentre $g(x) = \sqrt{x}$ (cioè la funzione che prende un numero reale positivo e ne fa la radice quadrata, cioè all'area di un quadrato associa il lato), la funzione che associa alla lunghezza del cateto la lunghezza dell'ipotenusa è data da

$$g \circ f(x) = g(1 + x^2) = \sqrt{1 + x^2}\,.$$

Esercizio 123 Prendiamo le funzioni $f(x) = x+2$ e $g(x) = 2x^2$. Determiniamo $f \circ g(1)$, $g \circ f(1)$. Poi in generale determiniamo le due funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.
Calcoliamo $f \circ g(1) = f(g(1))$: $g(1) = 2 \cdot 1^2 = 2$ e quindi $f(g(1)) = f(2) = 4$.
Calcoliamo $g \circ f(1) = g(f(1))$: $f(1) = 3$ e quindi $g(f(1)) = g(3) = 2 \cdot 3^2 = 18$ (Notate che è diverso dal precedente!!).

In generale:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x^2) = 2x^2 + 2$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = 2(x + 2)^2 = 2x^2 + 8x + 8\,.$$

Attenzione: Ora è il caso di sottolineare che il fatto di scrivere "$f(x) =$ *una qualche operazione su* x" è un modo per dire che la funzione f "prende" la variabile indipendente (il suo argomento) e "ci fa certe operazioni". Quindi questo "argomento", che quando è assolutamente generale chiamiamo x, può essere di qualunque tipo, x, x^2, t, 5, ecc...

Non per essere pedanti, ma per non lasciare nulla al caso: per esempio se $f(x) = |x| - 1$, allora

$$\begin{aligned}
&f(x) = |x| - 1\\
&f(x^2) = |x^2| - 1\\
&f(t) = |t| - 1\\
&f(\sqrt{2}x) = |\sqrt{2}x| - 1\\
&f(t + b) = |t + b| - 1\\
&f(10) = 9\\
&....
\end{aligned}$$

Nel darvi la definizione di funzione composta non mi sono molto preoccupata di specificare in quali casi si possa fare la composizione, ma è chiaro che a seconda dei casi, quando consideriamo la funzione composta $g \circ f$ dobbiamo fare attenzione a che questa sia ben definita. Infatti non è detto che tutti i valori dell'immagine di f siano ammissibili per la funzione g.

Esempio 124 Prendiamo le due funzioni $f(x) = 2-x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Possiamo sempre fare $g \circ f(x)$? Ossia qual'è il dominio di questa funzione composta?

La funzione f è sempre ben definita (il suo dominio è $\mathbf{R}$). La funzione composta è data da

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2) = \sqrt{2 - x^2}$$

e quindi per poterla calcolare devo assicurarmi che l'argomento della radice sia maggiore o uguale a zero. Quindi le x possibili sono quelle per cui $2-x^2 \geq 0$. Questa disequazione è verificata da tutte le x che stanno tra le due radici di $2 - x^2 = 0$, quindi

$$2 - x^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

ossia

$$\operatorname{dom} g \circ f = \{x \in \mathbf{R} \, : \, f(x) \in \operatorname{dom} g\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\,.$$

In sostanza, nonostante che f non dia nessun vincolo sulle x, il fatto che poi debba applicare la funzione g (il cui dominio è più piccolo dell'immagine di f) mi obbliga a "restringere l'insieme delle x di partenza".