Lezione 1: Introduzione

Un po' di insiemi (di numeri)

Un insieme è una collezione di oggetti, detti elementi dell'insieme. Per evitare ambiguità (bisogna sempre essere sicuri di che cosa si sta parlando e su cosa si sta lavorando), perchè un insieme sia ben definito, bisogna che i suoi elementi siano caratterizzati in modo chiaro da una qualche proprietà.

Per esempio l'insieme degli uomini alti non è un insieme ben definito, meno ancora quello degli uomini brutti. Mentre è ben definito l'insieme degli uomini alti più di 1 metro e 80 centimentri.

Notazione: Se A è un insieme e se a è un suo elemente, diremo che a appartiene ad A e lo indichere con $a \in A$.

Esempio 1 Supponiamo che A è l'insieme dei multipli di 4, mentre B è l'insieme dei numeri primi. Allora $8 \in A$ mentre $8 \notin B$ (8 non appartiene all'insieme B).

Che insieme è l'interesezione di A e B, $A \cap B$, cioè l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B?

In questo caso è l'insieme vuoto (che si indica con $\emptyset$), cioè non esistono elementi comuni tra A e B ($A \cap B = \emptyset$).

Ci ricordiamo le operazione tra gli insiemi? Ripassiamole:

1. $A \cup B$ (l'unione) è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad A o a B. Se dovessimo scriverlo in formula lo scriveremmo

   $$A \cup B = \{a : a \in A \text{ o } a \in B\}.$$

   Da ora in poi useremo le parentesi graffe per indicare gli insiemi.

2. $A \cap B$ (l'intersezione) è l'insieme di tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B. Ossia

   $$A \cap B = \{a : a \in A \text{ e } a \in B\}.$$

   Notate la differenza con quello sopra?

3. $A \setminus B$ (la differenza tra insiemi) è l'insieme degli elementi che appartengono ad A e non appartengono a B. Sinteticamente questo si scriverebbe

   $$A \setminus B = \{a : a \in A \text{ e } a \notin B\}.$$

   Forse questa operazione vi è nuova, ma è facile capire di che si tratta. Per esempio se A è l'insieme degli studenti nati nel segno dei pesci e B è l'insieme degli studenti nati a febbraio, allora $A \setminus B$ è l'insieme degli studenti dei pesci nati a marzo.

Gli insiemi che useremo saranno essenzialmente insiemi di numeri (o saranno "individuati" da insiemi di numeri). Scorriamoli rapidamente:

I Naturali

L'insieme dei numeri naturali $\{1, 2, 3, \ldots\}$ lo conosciamo bene. Si indica con

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Quali operazioni sono ben definite in questo insieme? La somma!
Cioè se facciamo la somma di due naturali il risultato è ancora un naturale (rimaniamo dentro l'insieme). Però non possiamo fare l'operazione inversa (la sottrazione).

Gli Interi

Aggiungiamo i numeri negativi e lo zero e otteniamo i cosiddetti numeri interi

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Qui ovviamente la somma verifica tutte le sue proprietà (ci ricordiamo quali sono?). Di numeri interi posso anche fare i prodotti, però ho di nuovo un problema, non posso sempre fare le divisioni (l'operazione inversa del prodotto).

I Razionali

Se ora consideriamo anche tutti i rapporti tra interi otteniamo i razionali

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \ : \ n \in \mathbf{Z}\,,\ m \in \mathbf{N}\,, m \neq 0 \right\}.$$

Quindi chiaramente nei razionali sia la somma che il prodotto e verificano tutte le solite proprietà.

Per come sono definiti è chiaro che questi insiemi di numeri sono contenuti uno nell'altro. Ossia $\mathbf{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbf{Z}$ (si scrive così: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$ è contenuto in $\mathbf{Z}$) e $\mathbf{Z}$ un sottoinsieme di $\mathbf{Q}$. Cioè $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. In particolare, per esempio $2 \in \mathbf{Q}$.

Osservazione Un numero che nel sistema decimale ha un numero finito di cifre dopo la virgola è un numero razionale, infatti basta moltiplicarlo e dividerlo per una potenza di dieci abbastanza alta che si può scrivere come il rapporto di un naturale e un intero.

Esempio 2 $3,850874 = \dfrac{3.850.874}{1.000.000}$

Richiamo sul sistema decimale e simili
Ovviamente è chiaro a tutti cosa sia la rappresentazione di un numero con il sistema decimale. Quello che si fa è semplicemente decomporre il numero in potenze di 10. Per esempio quando scriviamo 132 intendiamo

$$132 = \mathbf{1} \cdot 10^2 + \mathbf{3} \cdot 10^1 + \mathbf{2} \cdot 10^0\,,$$

ossia 1 centinaio più 3 decine più 2 unità. Cosìin numeri con la virgola:

$$24,56 = \mathbf{2} \cdot 10^1 + \mathbf{4} \cdot 10^0 + \mathbf{5} \cdot 10^{-1} + \mathbf{6} \cdot 10^{-2} = 20 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}\,.$$

Analogamente quando si scrivono i numeri nel **sistema binario**, si scrivono come somme di potenze di 2. Per esempio il numero 3 nel sistema binario è 11, ossia

$$\mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0$$

oppure 6 si scrive come 110

$$\mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0 \,,$$

per ogni numero ci vogliono più cifre, ma la comadità è che si possono usare tutti i numeri usando solo due simboli (0 e 1).

Torniamo ai razionali. Ci si convince facilmente che tra due razionali qualsiasi ce ne sono infiniti altri (mi raccomando per capire una cosa - e direi che questo vale non solo per la matematica - non dobbiamo mai accettarla come una verità rivelata, ma bisogna appunto convincerci che questa cosa è vera e coglierne la logica).

Dati due numeri razionali p e q il punto medio tra questi è ancora un razionale. Infatti la differenza tra due numeri razionali q e p (diciamo che sia $p < q$) è ancora un numero razionale e quindi basta sommare a p la metà della differenza e si ottiene un numero razionale tra p e q (e ovviamente questo procedimento lo si può ripetere infinite volte).

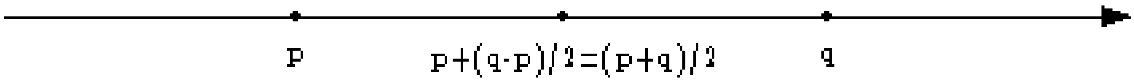

Figura 1: Tra due razionali ci sono infiniti altri razionali

Però ci sono anche numeri che non sono razionali.

Teorema 3 *La lunghezza della diagonale del quadrato di lato* 1*, cioè* $\sqrt{2}$*, non è un numero razionale.*

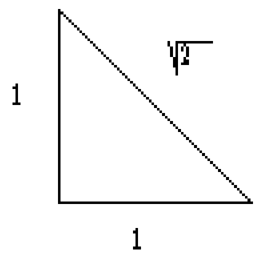

Figura 2: Rappresentazione grafica di radice di 2

Proof. Ne facciamo la dimostrazione solo per avere una prima idea di un ragionamento per assurdo. Siamo d'accordo che ci sono solo due alternative: o è un numero razionale o non lo è. Se escludiamo uno dei due casi necessariamente deve essere vero l'altro. Supponiamo che sia un numero razionale, se cosìfosse si potrebbero trovare due numeri naturali n e m che **possiamo scegliere coprimi** (ossia che non hanno fattori comuni) in modo che sia

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}.$$

Se facciamo il quadrato otteniamo

$$n^2 = 2m^2.$$

Questo automaticamente implica che n deve essere un numero pari (se fosse dispari sarebbe dispari anche il suo quadrato). Quindi diciamo che n è della forma $n = 2k$ per un qualche numero naturale k. Sostituendo questa espressione di n si deduce che

$$m^2 = 2k^2$$

e quindi anche per m possiamo dedurre che anche m è un numero pari cosìcome n. Ma questo non è possibile perchè li avevamo scelti coprimi! L'unico modo per non arrivare a una contraddizione è quello di non supporre $\sqrt{2}$ razionale. Vi convince?.....via via ci faremo un po' di ossa sui ragionamenti per assurdo. ○

I Reali

Questi "buchi" che ci sono tra i razionali sono coperti dai numeri irrazionali. L'unione di questi con tutti i razionali sono i **numeri reali** che indicheremo con **R**.

Questa si guarda bene dall'essere una definizione rigorosa, ma per avere un idea possiamo pensare ai numeri reali come tutti i numeri che si possono ottenere nel sistema decimale, anche con infinite cifre dopo la virgola. In particolare i razionali sono tutti i numeri che hanno dopo la virgola un numero finito di cifre (come abbiamo già notato) oppure se queste sono infinite si devono "ripetere periodicamente". Tutti gli altri sono numeri irrazionali.

E' quindi facile convincersi che tutti i numeri reali si possono "approssimare" con numeri razionali. Per esempio $\sqrt{2}$ si puo' approssimare con $1,41$ con un errore di un centesimo, oppure con $1,414$ facendo un errore di un millesimo, ecc....

Noi rapprensentiamo i numeri reali su una retta, la **retta reale**.

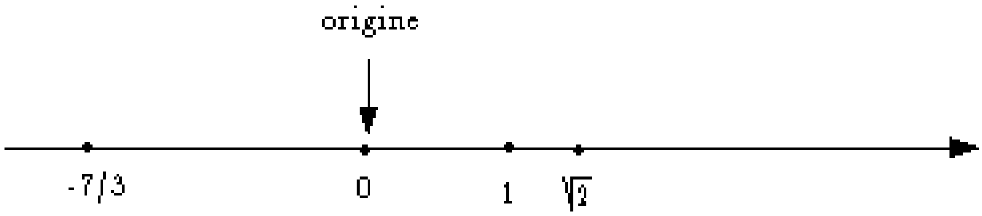

Figura 3: La retta reale

Fissiamo su una retta un punto in cui mettiamo lo zero e lo chiamiamo **origine**. Poi fissiamo un punto in cui mettiamo 1 che sarà la nostra unità di misura e quindi tutti i numeri reali positivi li mettiamo a destra dell'origine a distanza "corrispondente" e lo stesso facciamo con i numeri negativi a sinistra dell'origine.

Chiaramente i numeri reali sono un **insieme ordinato**, per esempio se prendiamo due numeri reali qualsiasi possiamo sempre dire quale dei due è più piccolo, questo non sarà sempre possibile con tutti gli oggetti che tratteremo.

Esercizio 4 Ordinare in ordine crescente i seguenti numeri reali: $\sqrt{3}$, $\frac{3}{2}$, $-1,5$, $-\pi$, $\frac{10}{7}$ e $-\frac{15}{2}$.

In $\mathbf{R}$ ci sono alcuni insiemi che sono particolarmente utili e useremo: gli intervalli e le semirette.

Definizione 5 *Si chiamano* **intervalli** *di* $\mathbf{R}$ *gli insiemi di numeri reali che "stanno tra due numeri reali fissati"*

Figura 4: Un intervallo

Per indicare questi insiemi useremo le seguenti notazioni: fissati due numeri reali a e b (gli **estremi** *dell'intervallo), con $a < b$,*

$$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} : \ a < x < b\}, \quad [a,b] = \{x \in \mathbf{R} : \ a \leq x \leq b\},$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbf{R} : \ a < x \leq b\}, \quad [a,b) = \{x \in \mathbf{R} : \ a \leq x < b\},$$

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} : \ x > a\}, \quad (-\infty,b) = \{x \in \mathbf{R} : \ x < b\}.$$

Come vedete mettiamo la parentesi tonda per dire che l'estremo corrispondente non è compreso nell'intervallo, mentre usiamo la parentesi quadra per intendere che nell'intervallo c'è anche l'estremo. Analogamente è facile capire cosa intendiamo con $[a,+\infty)$ e $(-\infty,b]$, cioè le due semirette, destra e sinistra, compresi gli estremi. In generale gli intervalli del tipo (a,b), $(a,+\infty)$ e $(-\infty,b)$ vengono detti **intervalli aperti**, mentre quelli del tipo $[a,b]$, $[a,+\infty)$ e $(-\infty,b]$ vengono detti **intervalli chiusi**.

Quindi, per esempio, l'insieme $\{x \in \mathbf{R} : \ -1 < x \leq 4\}$, cioè l'insieme di tutti i numeri reali maggiori di -1 e minori o uguali a 4, verrà indicato con...? ...$(-1,4]$.

Domanda Che insieme è $(2,4] \setminus [2,3)$. Beh, sono tutti i numeri reali più grandi di 2 e minori o uguali a 4 che non stanno in $[2,3)$, quindi sono tutti i numeri in $[3,4)$.

Vedete, una **notazione** non è altro che un modo più veloce di scrivere qualcosa usando pochi simboli, ma in modo che non ci siano ambiguità (anche se, come vedrete tra poco, qualche volta si usa lo stesso simbolo per indicare oggetti molto diversi con la speranza che il contesto aiuti a non fare confusione).

Gli insiemi $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ e il prodotto cartesiano

In quello che segue considereremo insiemi formati da coppie o terne di numeri reali di cui capiremo l'importanza e la loro rappresentazione grafica. Molte volte infatti per individuare degli oggetti che ci interessano potrebbe non essere sufficiente una sola caratteristica e quindi il nostro insieme potrebbe essere costituito da elementi ugnuno dei quali è individuato da una coppia. Per esempio ugnuno di voi è individuato da due informazioni, il nome e il cognome. Se poi le persone incominciano a essere troppe potrebbero esserci delle omonimie e quindi potrebbe essere necessario usare delle terne, il nome, il cognome e la data di nascita.

Come al solito le informazioni che ci interesseranno saranno sempre quantificate da dei numeri e quindi studieremo insiemi costituiti da coppie o terne di numeri reali.

Indicheremo con $\mathbf{R}^2$ le coppie di numeri reali:

$$\mathbf{R}^2 = \{(x,y)\,;\ x \in \mathbf{R}\,,\ y \in \mathbf{R}\}$$

Vedete la notazione che usiamo per indicare una coppia (x,y) di numeri reali è come quella che abbiamo usato per gli intervalli aperti di $\mathbf{R}$, ma sono oggetti molto diversi e non credo che faremo confusione.

$\mathbf{R}^2$ può essere rappresentato graficamente nel seguente modo. Fissiamo:

- Un'origine O
- Due rette distinte per l'origine (l'asse x e l'asse y)
- Due punti U_1 e U_2 sulle due rette

In questo che chiamiamo **sistema di riferimento cartesiano** rappresentiamo le coppie di numeri reali nel modo riprodotto nella figura:

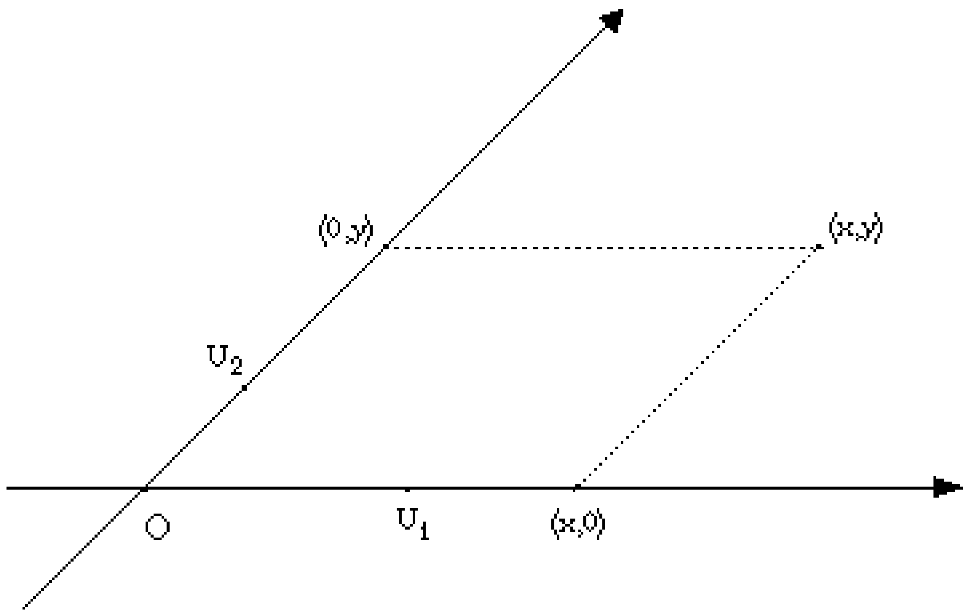

Figura 5: Riferimento cartesiano nel piano

In particolare i segmenti OU_1 e OU_2 sono l'unità di misura rispettivamente sull'asse x e sulla'asse y, e $U_1 = (1,0)$ e $U_2 = (0,1)$.

Cosicchè ogni coppia di numeri reali può essere rappresentata da un punto del piano e ogni punto del piano è individuato da una coppia di numeri reali (cosìcome i punti della terra sono determinati dalla latitudine e dalla longitudine).

Un riferimento cartesiano si dice **ortogonale** se i due assi formano un angolo di 90 gradi. Mentre si dice **ortonormale** se le unità di misura su i due assi sono uguali, cioè i segmenti OU_1 e OU_2 sono lunghi uguali.

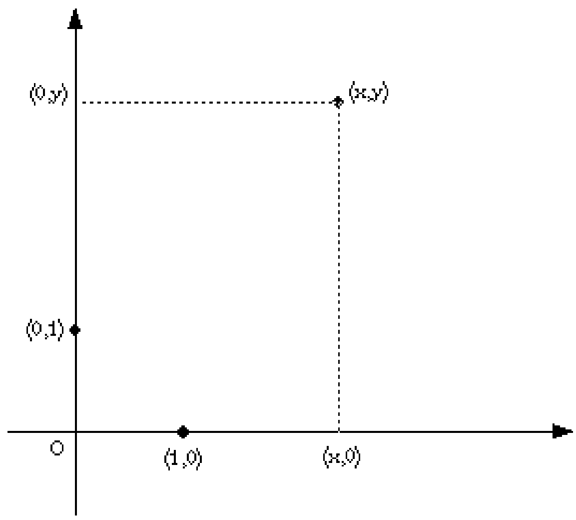

Figura 6: Riferimento cartesiano ortonormale

NOTA L'insieme $\mathbf{R}^2$ non è un insieme ordinato. Che significa domandarsi se $(1,2)$ è più grande o più piccolo di $(0,3)$?

Analogamente indicheremo con $\mathbf{R}^3$ le terne di numeri reali:

$$\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z)\,;\; x \in \mathbf{R}\,,\; y \in \mathbf{R}\,,\; z \in \mathbf{R}\}$$

E' chiaro che si possono rappresentare tutte le terne di numeri reali (x,y,z) con i punti dello spazio.

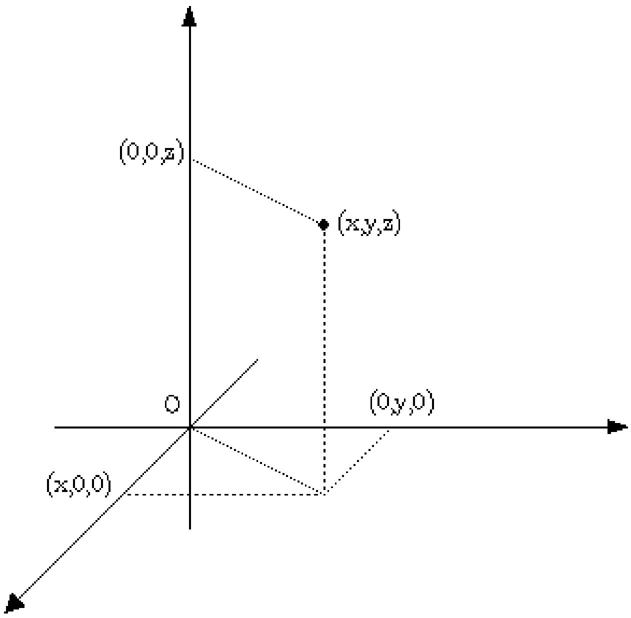

Figura 7: Riferimento cartesiano nello spazio

Si fissano:

- Un'origine O
- Tre rette non complanari passanti per l'origine (l'asse x, l'asse y e l'asse z)
- Tre punti U_1, U_2 e U_3 sulle tre rette

Ora che abbiamo capito l'importanza delle coppie e delle terne di numeri reali, possiamo introdurre un'altra operazione tra numeri reali: **Il prodotto cartesiano**.

Se abbiamo due insiemi A e B possiamo creare un nuovo insieme che indichiamo con $A \times B$ (prodotto cartesiano di A e B) che è l'insieme delle coppie (a, b) di cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B. Scriviamolo più sintetico che con troppe parole si perdono le informazioni importanti:

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Esempio 6 I rettangoli del piano sono prodotti cartesiani di due intervalli. Ci si convince facilmente di questo, per esempio disegnando sul piano l'insieme

$$(0, 1) \times (2, 4] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 < x < 1 \text{ e } 2 < y \leq 4\}$$

Esercizio 7

1. Disegnare sul piano cartesiano i seguenti insiemi: $\{1, 2\} \times [0, 2]$, $(-1, 1) \times \mathbf{R}$ e $\mathbf{R} \times \{1\}$.
2. Scrivere il cubo di lato due centrato nell'origine come prodotto cartesiano di tre intervalli.
3. Il quadrato di vertici i punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$ può essere scritto come un prodotto cartesiano di insiemi di $\mathbf{R}$?

Distanza tra due punti

Per concludere questa parte introduttiva ricordiamoci come si calcola la distanza tra due punti del piano (e poi dello spazio). Mettiamoci in un riferimento ortonormale nel piano (diciamo che da ora in poi, se non è esplicitamente specificato, prendiamo sempre riferimenti ortonormali) e fissiamo due punti P_1 e P_2, rispettivamente di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

Sì, basta usare il teorema di Pitagora. Infatti la distanza tra P_1 e P_2 non è altro che lunghezza dell'ipotenusa di vertici P_1 e P_2. E quindi

$$\text{dist}\,(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

Notate che al fine del risultato è irrilevante l'ordine con cui si mettono i due punti, infatti $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$ grazie al fatto che c'è il quadrato.

Esempio 8 Se $P_1 = (2, 1)$ e $P_2 = (-2, 3)$ allora

$$\text{dist}\,(P_1, P_2) = \sqrt{(2 + 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{20}\,.$$

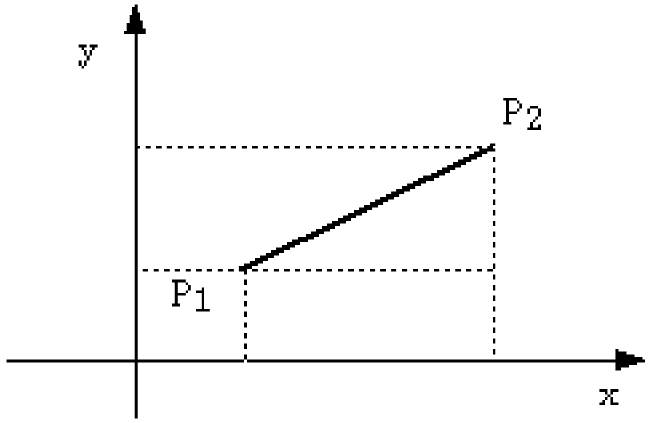

Figura 8: Basta usare il Teorema di Pitagora!

Se ora prendiamo due punti P_1 e P_2 che stanno sull'asse x, quindi $P_1 = (x_1, 0)$ e $P_2 = (x_2, 0)$ si ha

$$\mathrm{dist}\,(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = ... \qquad \text{Attenzione!}$$

E si! Attenzione non si può brutalmente semplificare la radice con il quadrato senza tener conto del segno di $(x_1 - x_2)$. Se $x_1 = 4$ e $x_2 = 2$ allora $\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{4} = 2 = x_1 - x_2$, ma se $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$ allora $\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(x_1 - x_2)$. La quantità giusta da usare è il valore assoluto (o modulo).

Definizione 9 *Il* **modulo** *(***valore assoluto***) di un numero x si indica con $|x|$ e vale il numero stesso se questo è positivo, altrimenti vale il numero cambiato di segno. Scritto un po' più rigoroso si ha che*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Insomma $|x|$ non è altro che la distanza di x dall'origine.

Esempio 10

$$|4| = 4\,, \qquad |-5| = 5\,, \qquad |0| = 0\,, \qquad |\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$$

Inoltre poichè per definizione la radice quadrata di un numero è quel numero **positivo** che elevato al quadrato è il numero in questione, si ha anche che

$$\sqrt{x^2} = |x|\,.$$

Concludiamo osservando che sempre come conseguenza del teorema di Pitagora otteniamo la formula che i permette di determinare la distanza tra due punti nello spazio. Guardando la figura...

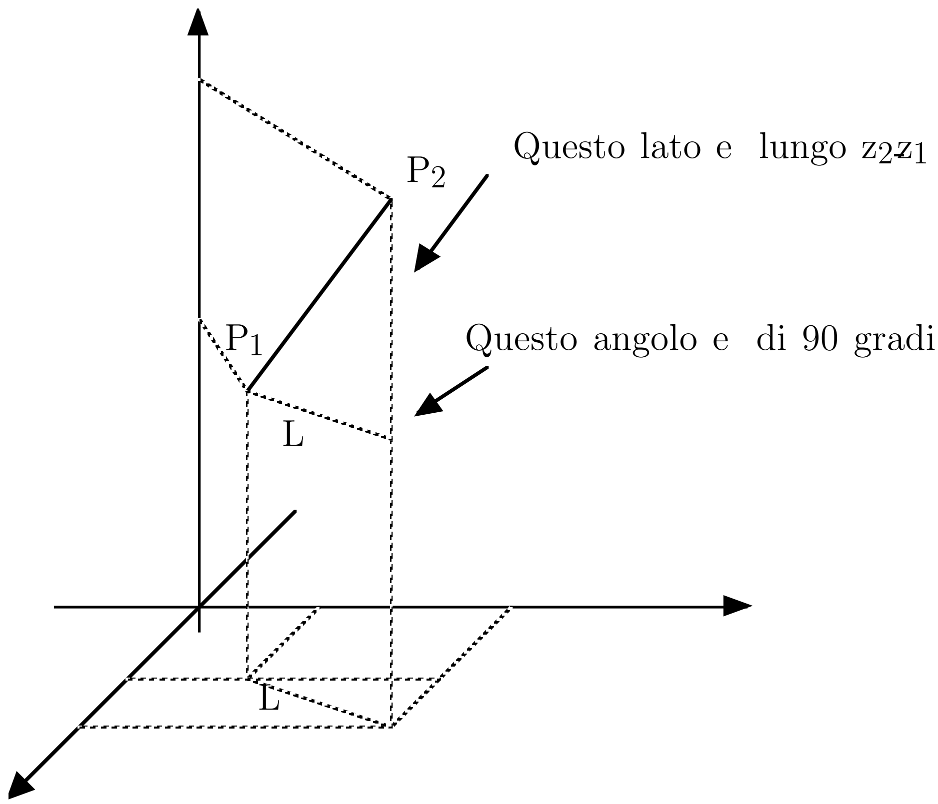

Figura 9: Anche qui è il teorema di Pitagora

è chiaro che la distanza tra $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ è data da

$$\text{dist}\,(P_1, P_2) = \sqrt{L^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

ma per quanto visto nel caso di distanza tra due punti del piano si ha anche che, essendo L la distanza tra le proizioni di P_1 e P_2 sul piano xy, $L^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ e quindi

$$\text{dist}\,(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,.$$