COMPLETE SYMMETRIC VARIETIES: UNA SURVEY PER I 50 ANNI DEL C.I.M.E.

CORRADO DE CONCINI

SOMMARIO. In occasione dei cinquant'anni del C.I.M.E. si espongono alcuni risultati degli ultimi anni che sono direttamente o indirettamente collegati ai risultati contenuti nelle note [11] relative al corso C.I.M.E., Invariant theory, Montecatini, 1982.

1. INTRODUZIONE

Quando Pietro Zecca, che ringrazio per il grande onore, mi ha chiesto di scrivere qualcosa per i cinquant'anni del C.I.M.E., mi sono immediatamente ricordato, che a parte la grande influenza che certi corsi C.I.M.E. hanno avuto sulla mia formazione di matematico, penso per esempio al corso Questions on Algebraic varieties del 1969, o Differential operators on Manifolds del 1975 o Differential Topology del 1976 al quale partecipai alternando un massacrante lavoro per comprendere il famoso B_Γ e una sana partecipazione a partite di briscola, il mio nome, come autore, appare in tre rendiconti di corsi C.I.M.E.:

1) Complete Symmetric varieties (con C. Procesi) in Invariant Theory, organizzato da F. Gherardelli a Montecatini Terme nel 1982.

2) Geometrical aspects of the Kadomtsev-Petviashvili equation (con E. Arbarello) in Global geometry and mathematical physics organizzato da M. Francaviglia and F. Gherardelli a Montecatini Terme nel 1988.

3) Quantum groups (con C. Procesi) in D-modules, representation theory, and quantum groups, organizzato da G. Zampieri and A. D'Agnolo a Venezia 1992.

Del primo e del terzo corso sono stato anche conferenziere. Fatte queste considerazioni, credo che sia un dovere dire qualcosa sugli argomenti trattati in questi articoli. I lavori 2) e 3) sono vere e proprie note e mentre il lavoro 1) è un articolo di ricerca e ha avuto, per sua stessa natura, una maggiore influenza e un numero maggiore di sviluppi. Questo articolo riguarda alcuni di tali sviluppi.

Le varietà simmetriche sono quozienti di un gruppo semisemplice aggiunto $\mathcal{G}$ definito su un campo algebricamente chiuso k, modulo il sottogruppo G degli elementi fissati da un automorfismo di ordine 2. L' esempio più famoso è dato dalle quadriche non singolari in uno spazio proiettivo. Nelle note di Montecatini [11] si costruisce, nel caso k sia di caratteristica zero, una "compattificazione equivariante canonica X di $\mathcal{G}/G$ che notevoli proprietà e viene detta compattificazione meravigliosa. Nella sezione 2) tale costruzione sarà brevemente richiamata. Il resto del nostro lavoro sarà dedicato a dare qualche cenno su varie altre costruzioni di X anche nel caso di campi di caratteristica positiva (sezioni 3 e 4)) e su varie proprietà e applicazioni delle varietà simmetriche complete (sezioni 5 e 6). Per ragioni di spazio questa nota passerà in rassegna quasi esclusivamente risultati relativi allo studio delle compattificazioni introdotte in [11]. Dunque anche per quanto riguarda le varietà simmetriche, non saranno trattati ne risultati relativi alla classificazione dei possibili embeddings di $\mathcal{G}/G$ ([62]) nè il lavoro relativo allo studio della teoria dell'intersezione su $\mathcal{G}/G$ ([8] e [12]). Nulla sarà inoltre menzionato relativamente ai molti importanti risultati sulle varietà sferiche e i loro embeddings (vedi ad es. [23]) e la classificazione delle varietà meravigliose [31].

2. Varietà simmetriche complete

Sia k un campo algebricamente chiuso, $\mathcal{G}$ un gruppo semisemplice aggiunto (per esempio il gruppo $PGL(n)$ delle proiettività di $\mathbb{P}^{n-1}$), $\sigma : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ un automorfismo con $\sigma^2 = id$, $G = \mathcal{G}^\sigma = \{g \in \mathcal{G} | \sigma(g) = g\}$ (per esempio se consideriamo l'involuzione σ su $PGL(n)$ indotta dall'involuzione ortogonale su $GL(n)$ definita su una matrice $n \times n$, $A \in GL(n)$ da $\sigma(A) = {}^tA^{-1}$, otteniamo che $\mathcal{G}/G$ è lo spazio delle ipersuperfici quadriche non singolari in $\mathbb{P}^{n-1}$). Vogliamo ora definire una compattificazione naturale dello spazio omogeneo $\mathcal{G}/G$. Con questo intenderemo una varietà proiettiva X con un'azione di $\mathcal{G}$, e un punto $p \in X$ tali che

- Lo stabilizzatore di p in $\mathcal{G}$ è uguale ad G.
- L'orbita $\mathcal{G}p$ è un aperto denso di Zariski in X.

Il modo più elegante di procedere è il seguente. Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di $\mathcal{G}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ quella di G. Sia $r = \dim_k \mathfrak{h}$. Possiamo dunque considerare $\mathfrak{h}$ come un punto nella varietà di Grassmann $Gr_r(\mathfrak{g})$ dei sottospazi r-dimensionali di $\mathfrak{g}$. L'azione aggiunta di $\mathcal{G}$ su $\mathfrak{g}$ induce un'azione di $\mathcal{G}$ su $Gr_r(\mathfrak{g})$. Possiamo allora definire (tale definizione è stata ispirata da un caso particolare trattato da Demazure)

$$X = \overline{\mathcal{G} \cdot \mathfrak{h}}.$$

Notiamo che il fatto che X sia una $\mathcal{G}$ varietà e che l'orbita $\mathcal{G} \cdot \mathfrak{h}$ sia densa è chiaro dalle definizione. Anche il fatto che lo stabilizzatore di $\mathfrak{h}$ sia G non è difficile da mostrare e dunque la nostra X soddisfa le due proprietà generali che abbiamo richiesto.

Per essere in grado però di esaminare più in dettaglio la geometria della nostra X, la definizione appena data non è la più efficiente. In [11] ne viene data un'altra. Per darla dobbiamo addentrarci un poco nel linguaggio degli spazi simmetrici.

Un toro $S \subset \mathcal{G}$ si dice anisotropo se, per ogni $s \in S$, si ha the $\sigma(s) = s^{-1}$. Si può vedere che tori anisotropi esistono. Scegliamo una volta per tutte un toro anisotropo T_1 che sia massimale con questa proprietà. Ogni toro massimale $T \supseteq T_1$ è necessariamente σ stabile e dunque σ si restringe ad un'involuzione su T e induce un'involuzione, che denoteremo ancora σ, sul gruppo $X^*(T)$ dei caratteri di T che preserva il sistema di radici $R \subset X^*(T)$, e sul suo duale $X_*(T)$.

Possiamo dividere le radici in due insiemi disgiunti $R_0 = \{\alpha \in R | \ \sigma(\alpha) = \alpha\}$ e $R_1 = R - R_0$. È possibile vedere che si può effettuare una scelta dell'insieme delle radici positive R_+ in modo tale che se $\alpha \in R_+ \cap R_1$, $\sigma(\alpha) \notin R_+$. Sia $\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1$, con $\Delta_\epsilon = \Delta \cap R_\epsilon$, $\epsilon = 0, 1$, il corrispondente insieme di radici semplici, $B \supset T$ il corrispondente gruppo di Borel e $P \supset B \supset T$ il sottogruppo parabolico generato da B e dai "root subgroups" X_α con $\alpha \in R_0$.

Consideriamo ora un peso dominante (rispetto alla nostra scelta di radici positive) λ e denotiamo con V_λ il corrispondente $\mathcal{G}$-modulo irriducibile di peso più alto λ. Facciamo ora le seguenti ipotesi su λ:

(1) $\sigma(\lambda) = -\lambda$,
(2) $\lambda = \mu - \sigma(\mu)$ con $\mu \in X^*(T)$,
(3) $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$ per ogni $\alpha \in R_1$.

Sotto queste ipotesi è facile vedere che V_λ contiene un vettore v non nullo, unico a meno di multipli, che è invariante per l'azione di G. In particolare se $p \in \mathbb{P}(V_\lambda)$ è il punto che rappresenta la retta generata da v, possiamo definire

$$X_\lambda = \overline{\mathcal{G}p}.$$

Il teorema seguente che riassume le principali proprietà della nostra compattificazione dice anche che X_λ è indipendente da λ e coincide con la varietà X costruita più sopra a la Demazure.

Teorema 2.1. *1) Qualunque sia il peso λ soddisfacente le nostre ipotesi, X_λ è $\mathcal{G}$-isomorfa alla varietà X introdotta in precedenza. In particolare le varietà X_λ sono fra loro $\mathcal{G}$-isomorfe.*

2) Esiste una corrispondenza biunivoca canonica tra l'insieme delle parti di Δ_1 e l'insieme delle $\mathcal{G}$ orbite in X.

3) Dato comunque $\Gamma \subset \Delta_1$ denotata con $\mathcal{O}_\Gamma$ la corrispondente $\mathcal{G}$-orbita, si ha

$$\overline{\mathcal{O}_\Gamma} = \cup_{\Gamma' \supset \Gamma} \mathcal{O}_{\Gamma'}.$$

In particolare $\mathcal{O}_{\Gamma'} \subset \overline{\mathcal{O}_\Gamma}$ se e solo se $\Gamma \subset \Gamma'$. Inoltre $|\Gamma| = codim_X \mathcal{O}_\Gamma$.

4) X è liscia, la chiusura di ogni $\mathcal{G}$ orbita in X è liscia.

5) $X - \mathcal{G} \cdot \mathfrak{h} := D = \cup_{\alpha \in \Delta_1} D_\alpha$, con $D_\alpha = \overline{\mathcal{O}_{\{\alpha\}}}$. D è un divisore a incroci normali e per ogni $\Gamma \subset \Delta_1$, $\overline{\mathcal{O}_\Gamma}$ è l'intersezione trasversale dei divisori D_α con $\alpha \in \Gamma$.

6) L'unica orbita chiusa $\mathcal{O}_{\Delta_1}$ è isomorfa a $\mathcal{G}/P$.

Come si vede da questo teorema, le proprietà di X mettono in evidenza che essa ha una struttura che la rende, come $\mathcal{G}$-varietà, la migliore possibile: ha solo orbite a chiusura liscia, ciascuna chiusura di orbita è l'intersezione trasversale dei divisori che la contengono e così via. Per questo varietà di questo tipo sono anche dette $\mathcal{G}$-varietà o embedding meravigliosi.

Questo è essenzialmente il teorema dimostrato nella prima parte delle note del corso del 1982.

Voglio terminare richiamando che nel caso $\mathcal{G} = PGL(3)$ e σ l'involuzione ortogonale, $\mathcal{G}/G$ è lo spazio delle coniche non singolari che può essere banalmente compattificato nel $\mathbb{P}^5$ di tutte le coniche nel piano. X si ottiene allora scoppiando la superficie di Veronese in $\mathbb{P}^5$ e viene detta varietà delle coniche complete. Tale varietà è stata studiata in dettaglio da G. Gherardelli, padre dell'organizzatore del corso del 1982 in [18].

Per finire ricordo che nei casi $\mathcal{G} = PGL(n)$ e σ l'involuzione ortogonale e $\mathcal{G} = PGL(n) \times PGL(n)$ e σ l'involuzione che scambia i due fattori, in cui la varietà X viene rispettivamente chiamata la varietà delle quadriche complete e delle collineazioni complete esiste una vasta letteratura sia classica che moderna, [1],[17], [26], [46], [47], [48],[57], [59], [60].

3. Il caso di caratteristica positiva

Come abbiamo ricordato più in alto nelle note di Montecatini [11] la nostra compattificazione X viene costruita e studiata nel caso k sia di caratteristica zero. Una completa sistemazione nel caso di caratteristica positiva è stata ottenuta più di recente.

L'idea fondamentale per ottenere tale risultato consiste nella seguente osservazione. Consideriamo in X la chiusura Z della T_1 orbita $T_1 p$ (che è isomorfa, come varietà, al quoziente S di T_1 modulo i sui elementi di ordine 2. Tale Z è dunque una compattificazione equivariante del toro S. Molte delle proprietà della nostra X si possono leggere facilmente a partire da proprietà di Z e viceversa.

Il modo di formalizzare quest'osservazione è un risultato, essenzialmente dovuto ad Uzawa [58, 2.4], che riguarda una proprietà del gruppo dei punti di $\mathcal{G}$ a coefficienti in un campo completo K dotato di una valutazione discreta non banale (per esempio $K = k((t))$, ω, con campo residuo k, anello degli interi $\mathfrak{o}$ e parametro uniformizzante π.

Denotiamo con $\mathcal{G}(K)$ il gruppo dei punti di $\mathcal{G}$ a coefficienti in K e con $\mathcal{G}(\mathfrak{o})$ quello dei punti a coefficienti in $\mathfrak{o}$. Esso $\mathcal{G}(K)$ eredita un'involuzione σi cui punti fissi chiameremo $G(K)$. Si ha

Teorema 3.1. *Si può scegliere il toro T_1 in $\mathcal{G}$ in modo tale che $\mathcal{G}(K) = \mathcal{G}(\mathfrak{o}).(T_1.G)(K)$.*

Nel caso del gruppo ovvero il caso in cui $\mathcal{G} = G \times G$ e σ è l'involuzione che scambia i fattori e quindi $\mathcal{G}/G \simeq G$ come $G \times G$-spazio omogeneo mediante la moltiplicazione destra e sinistra, questo teorema equivale ad un famoso risultato di Iwahori-Matsumoto che generalizza ad un gruppo semisemplice qualunque la teoria dei divisori elementari per matrici $n \times n$.

La conseguenza rilevante per lo studio delle varietà simmetriche è la seguente

Proposizione 3.2. *Sia Y una $\mathcal{G}$-varietà completa. $p \in Y$ un punto tale che*

(1) *Lo stabilizzatore di p è G.*
(2) *L'orbita $\mathcal{G}p$ è densa in Y.*

Allora un aperto $\mathcal{G}$ stabile U è uguale a Y se e solo se U contiene $\overline{Tp}$.

Il modo di usare questa proposizione è di definire anche in caratteristica arbitraria la varietà X in modo analogo a quello fatto nel paragrafo precedente (con le necessarie precauzioni), poi studiare un aperto G-stabile U per il quale le proprietà elencate nel Teorema 2.1 sono verificate. Infine usare la proposizione per verificare che $X = U$. Ricordiamo che la teoria delle varietà toriche è valida in caratteristica arbitraria e in particolare il fatto di essere o meno completa è equivalente ad una semplice proprietà combinatoria del fan associato (vedi ad es. [22]).

Questa idea viene usata in [51] per costruire la varietà X in caratteristica arbitraria, nel caso del gruppo. È diventata poi un fatto di folclore e viene finalmente completamente esposta in [14] (si veda anche [16]) dove la varietà X viene costruita in generale in caratteristica diversa da 2 e anche come schema su $\mathbb{Z}[1/2]$.

4. Varietà simmetriche complete, ulteriori costruzioni

Negli ultimi anni sono apparse varie costruzioni alternative della varietà X. Ne vogliamo richiamare qualcuna.

Cominciamo col vedere come si possa ottenere la compattificazione X di $\mathcal{G}/G$ a partire dalla compattificazione Y del gruppo $\mathcal{G}$ come $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ varietà. Consideriamo l'applicazione $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ definita da $f(g) = g\sigma(g)^{-1}$. L'immagine di f è chiaramente isomorfa a $\mathcal{G}/G$. Ora consideriamo la compattificazione meravigliosa Y del gruppo $\mathcal{G}$. Se componiamo l'inclusione di $\mathcal{G}/G$ in $\mathcal{G}$ con quella di $\mathcal{G}$ in Y, otteniamo un'inclusione di $\mathcal{G}/G$ in Y. Se si considera l'omomorfismo $j : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dato dal grafico di σ, i.e. $j(g) = (g, \sigma(g))$, otteniamo componendo con j, un'azione di $\mathcal{G}$ su Y rispetto alla quale $\mathcal{G}/G$ è stabile. Il seguente risultato appare in [29] in caratteristica zero e viene adattato al caso di caratteristica qualunque in [6]

Teorema 4.1. *La chiusura di $\mathcal{G}/G$ in Y è isomorfa a X come $\mathcal{G}$-varietà.*

Un altro modo di ottenere X a partire da Y è come quoziente nel senso della teoria geometrica degli invarianti [19]. In questo caso si parte come prima dalla compattificazione Y del gruppo $\mathcal{G}$ e si dimostra che esiste un fibrato lineare molto ampio L su Y (che è automaticamente linearizzato rispetto al rivestimento semplicemente connesso di $\mathcal{G}$) tale che

Teorema 4.2. *Il quoziente secondo Mumford della varietà polarizzata (Y, L) rispetto al sottogruppo G è isomorfo come $\mathcal{G}$-varietà alla compattificazione meravigliosa X di $\mathcal{G}/G$.*

Entrambi i risultati appena ricordati ci mostrano come in generale la costruzione della nostra compattificazione possa essere ricondotta a quello della compattificazione del gruppo. Mostreremo ora almeno una costruzione alternativa della costruzione della compattificazione del gruppo. In questo caso, come già richiamato brevemente più in alto, $\mathcal{G} = G \times G$ e $\sigma((h_1, h_2)) = (h_2, h_1)$ per ogni $h_1, h_2 \in G$ Allora il sottogruppo dei punti fissi è il sottogruppo diagonale, $\Delta G = \{(h, h) | h \in G\}$ e come $G \times G$-spazio omogeneo, $G \times G/\Delta G$ è isomorfo a G rispetto all'azione destra e sinistra di $G \times G$. X viene allora ad essere una compattificazione del gruppo aggiunto G.

La seguente costruzione di X è dovuta a Brion [6] ed è stata in parte ispirata da un precedente lavoro di Thaddeus [55] che trattava il caso del gruppo $PGL(n)$.

Consideriamo un sottogruppo parabolico $P \subset G$ in G e prediamo la "varietà delle bandiere parziali $G/P = \mathcal{P}$. Tale varietà è una varietà proiettiva e supporremo che G agisca fedelmente su $\mathcal{P}$. In $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ consideriamo la diagonale S e consideriamola come un punto dello schema di Hilbert Hilb$(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$. Si noti che l'azione ovvia di $\mathcal{G} = G \times G$ su $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ne induce una sullo schema di Hilbert e il fatto che l'azione di G su $\mathcal{P}$ sia fedele implica chiaramente che lo stabilizzatore della diagonale è ΔG. Si ha

Teorema 4.3. *Come $\mathcal{G}$ varietà, la compattificazione X è isomorfa alla chiusura in Hilb$(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$ della G orbita della diagonale S.*

Inoltre se si suppone che G sia la componente connessa dell'identità del gruppo degli automorfismi di $\mathcal{P}$, allora X è la componente irriducibile di Hilb$(\mathcal{P} \times \mathcal{P})$ contenente S.

Da questo Teorema vediamo che la nostra varietà X parametrizza, nel caso del gruppo, una famiglia di sottovarietà $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ che si ottiene restringendo la famiglia universale sullo schema di Hilbert. Brion dimostra che ogni fibra di tale famiglia è una sottovarietà ridotta e di Cohen Macaulay di $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ e se $P = B$ è un sottogruppo di Borel anche di Gorestein.

Una variazione di questo procedimento può essere utilizzata anche per costruire la varietà X nel caso di un'involuzione generale σ. Si procede così.

Partiamo da un sottogruppo parabolico $P \subset \mathcal{G}$ tale che l'azione di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{G}/P := \mathcal{P}$ sia fedele. Prendiamo l'involuzione σ e consideriamo il parabolico $\sigma(P)$ e lo spazio omogeneo $\mathcal{G}/\sigma(P) := \mathcal{P}^\sigma$. Abbiamo un ovvio isomorfismo $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^\sigma$, σ-lineare (ovvero tale che $f(gP) = \sigma(g)f(P)$). Prendiamo il grafico S_f di f in $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^\sigma$ e consideriamolo come un punto nello schema di Hilbert Hilb$(\mathcal{P} \times \mathcal{P}^\sigma)$. Agiamo con $\mathcal{G}$ su $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^\sigma$ restringendo l'azione di $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ al sottogruppo immagine dell'omomorfismo $j : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dato dal grafico di σ, i.e. $j(g) = (g, \sigma(g))$, e prendiamo l'azione indotta su Hilb$(\mathcal{P} \times \mathcal{P}^\sigma)$. Si ha

Teorema 4.4. [6] *1) La $\mathcal{G}$-orbita di S in Hilb$(\mathcal{P} \times \mathcal{P}^\sigma)$ è isomorfa a $\mathcal{G}/G$.*

2) La chiusura della $\mathcal{G}$-orbita di S è una $\mathcal{G}$-varietà isomorfa alla compattificazione meravigliosa X di $\mathcal{G}/G$.

Soprattutto nel caso del gruppo esistono varie altre costruzioni della varietà X o di varietà ad essa collegate, si veda ad esempio [35], [36]. Una costruzione mi è stata comunicata da Kostant. Infine esiste una vasta letteratura riguardante lo studio, strettamente collegato, dei cosiddetti monoidi algebrici riduttivi, [37], [38], [39], [40],[61] , [41]. Per ulteriori proprietà di compattificazioni di gruppi riduttivi in generale si veda anche [44] e [56]. Un importante generalizzazione della compattificazione del gruppo $PGl(n)$ è stata introdotta da Lafforgue [27]. Il problema di estendere la costruzione di Lafforgue al caso di altri gruppi semisemplici appare aperto e molto interessante.

5. Fibrati lineari

In questa sezione, per non appesantire troppo le notazioni assumeremo di essere in caratteristica zero e ogni volta faremo un breve commento sulla validità o meno dei nostri risultati in caratteristica positiva.

Già nelle note del corso di Montecatini ci sono vari risultati riguardanti lo studio di fibrati lineari sulla varietà X. In particolare viene calcolato il rango del gruppo di Picard di X.

Prendiamo l'unica orbita chiusa in X e ricordiamo che essa è isomorfa a $\mathcal{G}/P$ dove P è il sottogruppo parabolico introdotto nel primo paragrafo. Ricordiamo che $\mathrm{Pic}(\mathcal{G}/P)$ è isomorfo al sottoreticolo del reticolo dei pesi Λ per $\mathcal{G}$ che sono invarianti rispetto al gruppo di Weyl di P. Il risultato cruciale è il seguente.

Proposizione 5.1. *L'applicazione di restrizione*

$$i^* : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{G}/P)$$

è iniettiva.

La proposizione implica che possiamo identificare $\mathrm{Pic}(X)$ con un sottoreticolo del reticolo Λ.

Il rango di $\mathrm{Pic}(X)$ è dato da

Teorema 5.2. $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbf{Z}^{l+s}$ *dove l è il rango del reticolo dei pesi λ in Λ tali che $\sigma(\lambda) = -\lambda$ e s è il numero delle coppie di radici semplici $\alpha, \beta \in \Delta_1$ con la proprietà che o $\alpha \neq -\sigma\beta$ o $\alpha = -\sigma\beta$ e $(\alpha, \beta) \neq 0$.*

In caso $s > 0$ diremo che la nostra involuzione è speciale e ogni coppia di radici semplici (α, β) che soddisfano le proprietà del Teorema, eccezionale. I corrispondenti due pesi fondamentali saranno detti eccezionali.

Ora sia $\tilde{\mathcal{G}}$ il gruppo semplicemente connesso rivestimento universale di $\mathcal{G}$. σ si solleva ad un'involuzione di $\tilde{\mathcal{G}}$ che chiameremo con la stessa lettera.

Ad ogni peso dominante $\lambda \in \Lambda$ associamo la rappresentazione irriducibile V_λ di peso più alto λ. Si ha che V_λ contiene al più una retta ℓ stabile rispetto all'azione di $\tilde{\mathcal{G}}^\sigma$. In particolare $\tilde{\mathcal{G}}^\sigma$ agisce su ℓ mediante un carattere ψ_λ. Se denotiamo allora con M il reticolo generato dai λ per i quali V_λ contiene

una retta ℓ stabile rispetto all'azione di $\tilde{\mathcal{G}}^\sigma$, otteniamo un omomorfismo
$$\psi : M \to X^*(\tilde{\mathcal{G}}^\sigma).$$

Teorema 5.3. [14] *1) Il nucleo di ψ ha rango l ed è contenuto nel reticolo dei pesi λ in Λ tali che $\sigma(\lambda) = -\lambda$.*

2) $M = \mathrm{Pic}(X)$ ed è generato dal nucleo di ψ e dai pesi fondamentali eccezionali.

Con le dovute modifiche notazionali questo risultato sussiste anche in caratteristica positiva.

Una volta calcolato il gruppo di Picard di X, la successiva questione che sembra naturale affrontare è il calcolo della coomologia di un fibrato lineare su X. Cominciamo con il ricordare che ogni fibrato lineare su X ha un'unica $\tilde{\mathcal{G}}$- linearizzazione e dunque $\tilde{\mathcal{G}}$ agisce sulla sua coomologia. Cominciamo con le sezioni.

Diamo un ordinamento parziale a $\mathrm{Pic}(X)$ dicendo che $\mu \leq \lambda$ se
$$\lambda - \mu = \sum_{\alpha \in \Delta_1} n_\alpha(\alpha - \sigma(\alpha))$$
con $n_\alpha \geq 0$ per ogni α. Si ha

Teorema 5.4. *Sia $\lambda \in M$. Sia $S_\lambda = \{\mu \in M | \mu \leq \lambda \text{ e } \mu \text{ dominante}\}$. Allora*
$$H^0(X, L_\lambda) = \oplus_{\mu \in S_\lambda} V_\mu.$$

Tale teorema appare già in [11]. La sua versione in caratteristica positiva ha una formulazione più complicata in termini di buone filtrazioni ed è una conseguenza del fatto che X è Frobenius split (si veda [51] e[14]). In [51] esso viene usato per dare una dimostrazione geometrica di un risultato di Koppinen [24].

Alcuni casi speciali del teorema implicano formule classiche sulle funzioni simmetriche. Il caso di $PGl(n) \times PGl(n)$, con σ che scambia i fattori e $\lambda = m(\omega_1, -\omega_1)$ equivale ad una formula di Cauchy che fornisce la decomposizione dell'anello delle funzioni polinomiali sullo spazio delle matrici $n \times n$ rispetto all'azione di $Gl(n) \times Gl(n)$. Il caso di $PGl(n)$, con σ l'involuzione ortogonale o simplettica (in questo caso n è pari) e λ un multiplo di ω_1 (nel primo caso pari), equivale a una formula di Littlewood che fornisce la decomposizione dell'anello delle funzioni polinomiali sullo spazio delle matrici simmetriche e antisimmetriche $n \times n$ rispetto all'azione di $Gl(n)$.

Nel caso in cui λ è dominante si ha anche che in caratteristica arbitraria,
$$H^i(X, L_\lambda) = 0$$
per ogni $i > 0$.

Il caso di un λ qualunque è invece molto più complicato. Gli unici risultati sono stati recentemente ottenuti, in modo indipendente, da Syu Kato [21] e Tchoudjem [54] e nel caso della compattificazione del gruppo $G = G \times G/G$. Per enunciare il risultato ricordiamo che se Π è il reticolo dei pesi di G, si può in questo caso identificare $\mathrm{Pic}(X)$ con Π in modo tale se $\lambda \in \Pi$ e $Z_\lambda = \{\mu \in \Pi | \mu \leq \lambda \text{ e } \mu \text{ dominante}\}$ (qui usiamo l'ordinamento dominante rispetto alle radici semplici per G),

$$H^0(X, L_\lambda) \simeq \oplus_{\mu \in Z_\lambda} \mathrm{End}(V_\mu)$$

come $\tilde{G} \times \tilde{G}$ moduli, con $\tilde{G}$ il rivestimento universale di G.

Consideriamo lo spazio vettoriale reale $V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Pi, \mathbb{R})$ e in esso la camera di Weyl fondamentale $\mathcal{C}^+ = \{v \in V | \langle v, \alpha \rangle \geq 0 \text{ per ogni } \alpha \in \Delta\}$ ovvero il cono delle combinazioni a coefficienti positive dei pesi fondamentali.

Introduciamo per ogni $\mu \in V$ l'insieme :

$$V(\lambda, \mu) := \{v \in \mathcal{C}^+ | \langle v, \mu - \lambda \rangle > 0\}$$

Dato $w \in W$, il gruppo di Weyl,

$$J_w := \{\alpha \in \Delta | w^{-1}(\alpha) < 0\}$$

e per ogni $\alpha \in \Delta$,

$$\alpha^\perp := \{v \in \mathcal{C}^+ | \langle v, \alpha \rangle = 0\} \ .$$

Come al solito denotiamo con ρ la semisomma delle radici positive e dato $w \in W$, $v \in V$, poniamo $w \star v := w(v + \rho) - \rho$. Infine dati due spazi topologici $B \subset A$, denotiamo con $h^i(A, B)$ la dimensione dell'i-esimo gruppo di coomologia della coppia (A, B) a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Detto questo :

Teorema 5.5. *Dato $\lambda \in \Pi$, si ha un isomorfismo di $\tilde{G} \times \tilde{G}-$moduli :*

$$H^i(X, L_\lambda) \simeq \oplus_{\mu \in \Pi,\ \mu\, dominante} \mathrm{End}\ (V_\mu)^{m^i_h(\mu)}$$

con

$$m^i_h(\mu) = \sum_{w \in W \setminus \{e\}} h^{i-2l(w)-1} \left(V(h, w * \mu), V(h, w * \mu) \cap \bigcup_{\alpha \in J_t} \alpha^\perp \right)$$

$$+ h^i(\mathcal{C}^+, V(h, \mu))$$

se $\mu - \lambda$ è una combinazione lineare a coefficienti interi delle radici semplici Δ, e $m^i_h(\mu) = 0$ altrimenti.

Notiamo che contrariamente al caso delle sezioni, nei gruppi di coomologia superiori un irriducibile può comparire con molteplicità maggiore di 1.

Come già detto sopra, il calcolo dei gruppi di coomologia della compattificazione X a coefficienti in un fibrato lineare è completamente aperto in generale.

Passiamo ora ad un ulteriore problema. Consideriamo di nuovo la varietà X nella massima generalità e prendiamo due fibrati lineari L_λ, L_μ con $\lambda, \mu \in \mathrm{Pic}(X)$ dominanti. In [16] viene posto il problema di vedere se la mappa di moltiplicazione

$$H^0(X, L_\lambda) \otimes H^0(X, L_\mu) \to H^i(X, L_{\lambda+\mu})$$

sia suriettiva. In primo risultato in questa direzione viene ottenuto in [20] come applicazione della cosiddetta congettura PRV (vedi [25]). Recentemente il problema è stato completamente risolto, in caratteristica zero, in [10] che dimostrano

Teorema 5.6. *Sia X la compattifcazione meravigliosa dello spazio omogeneo $\mathcal{G}/\mathcal{G}^\sigma$. Allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathrm{Pic}(X)$ dominanti, si ha che la mappa di moltiplicazione*

$$H^0(X, L_\lambda) \otimes H^0(X, L_\mu) \to H^i(X, L_{\lambda+\mu})$$

è suriettiva.

In caratteristica positiva il risultato è falso anche nel caso della compattificazione del gruppo (fissato un primo p si può dare un controesempio per la compattificazione del gruppo $PGl(2p)$ in caratteristica p). Sembra essere un problema difficile ed interessante decidere, fissata una delle nostre compattificazioni X, per quali primi p il teorema continui ad essere vero per X in caratteristica p.

Un altro problema interessante è il seguente. Consideriamo un $\lambda \in \mathrm{Pic}(X)$ che sia dominante. Consideriamo l'anello graduato

$$R = \oplus_{n \in \mathcal{Z}} H^0(X, L_{n\lambda}).$$

Dal precedente teorema sappiamo che esso è generato dagli elementi di grado 1. Il problema è dare generatori per l'ideale delle relazioni tra questi elementi. Anche questo problema sembra aperto perfino nei casi più semplici.

In quest'ambito ricordo infine che l'anello multigraduato

$$\oplus_{\lambda \in \ Pic(X)} H^0(X, L_\lambda)$$

è stato studiato in dettaglio in [10]. Ne è stata data una base e fornite relazioni sulla falsariga della "standard monomial theory (vedi [28]).

6. Coomologia di X, decomposizione cellulare, orbite.

In questo paragrafo ci occuperemo del calcolo dei numeri di Betti di X e della determinazione del suo anello di coomologia. La prima osservazione da fare è molto semplice e vale in grande generalità. Se consideriamo un qualunque spazio omogeneo $\mathcal{G}/H$ e prendiamo un toro massimale $T \subset \mathcal{G}$, allora l' azione di T su $\mathcal{G}/H$ ha un numero finito di punti fissi. In effetti se consideriamo un tale punto fisso x e H_x è lo stabilizzatore di x in $\mathcal{G}$, allora $T \subset H_x$ e lo spazio tangente a x, che si identifica con $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_x$ con $\mathfrak{h}_x = \mathrm{Lie} H_x$, è un quoziente di $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ e dunque su di esso l' azione di T ha l'origine come unico punto fisso. Ne segue che x è un punto fisso isolato e dunque $(\mathcal{G}/H)^T$ è finito.

Questa semplice osservazione ha come conseguenza immediata che ogni $\mathcal{G}$-varietà contenete un numero finito di orbite contiene solo un numero finito di punti fissi rispetto all'azione di T. Questo si applica in particolare alla nostra varietà X. Usando questo fatto e ricordando che X è liscia, possiamo applicare [2] e ottenere

Teorema 6.1. *La varietà X ammette una pavimentazione mediante celle affini localmente chiuse e T-stabili, ciascuna contenente esattamente uno punto fisso per l'azione di T. In particolare*

1. $H_{2i+1}(X, \mathbb{Z}) = 0$ *per ogni* $i \geq 0$
2. $H_*(X, \mathbb{Z})$ *non ha torsione.*
3. *La caratteristica di Eulero-Poincaré* $\chi(X)$ *di* X *è uguale a* $|X^T|$.

Con un poco di lavoro in più si può ottenere una formula per il polinomio di Poincaré $\sum \mathrm{rk} H^{2i}(X, \mathbb{Z}) q^i$, di X. Per esempio già in [11] si dimostra che nel caso della compattificazione del gruppo G tale polinomio è uguale a

$$\sum_{w,u \in W} q^{\ell(w)+\ell(u)+R(u)}$$

dove W è il gruppo di Weyl di G, $\ell(-)$ è la funzione lunghezza e $R(u)$ è la il numero di riflessioni semplici s tale che $\ell(us) < \ell(u)$.

Un approccio alternativo seguito in [13] è usare le congetture di Weil e contare i punti razionali di X su un campo finito. In questo modo si ottengono formule alternative per il polinomio di Poincaré. Così, eguagliando due espressioni diverse per lo stesso polinomio, si ottengono alcune curiose identità. Per esempio nel caso della compattificazione del gruppo G, l' identità che si ottiene in questo modo, dividendo per il polinomio $\sum_{w \in W} q^{\ell(w)}$, è

Proposizione 6.2.

$$\sum_{u \in W} q^{\ell(u)+R(u)} = \sum_{\Gamma \subset \Delta} \sum_{w \in W/W_\Gamma} q^{\ell(w)} (q-1)^{|\Gamma|} q^{|R_\Gamma/2|}.$$

Una volta calcolati i numeri di Betti viene naturale determinare l'anello di coomologia di X. Per fare questo conviene lavorare con la coomologia $\mathcal{G}$-equivariante. In [3] viene elaborato un metodo generale per descrivere la coomologia equivariante a coefficienti in $\mathbb{Q}$, di una classe di embeddings equivarianti di uno spazio omogeneo detti regolari. Nel caso della nostra varietà X, il risultato che si ottiene è il seguente.

Scegliamo come nel paragrafo 2 un toro anisotropo massimale T_1 e un toro massimale $T \supset T_1$. Abbiamo visto nel paragrafo 2 che le orbite di X sono indicizzate dai sottoinsiemi di Δ_1. Dato $\Gamma \subset \Delta$, prendiamo il gruppo parabolico $\mathcal{P}_\Gamma$ associato a Γ (la convenzione è che $\mathcal{G} = \mathcal{P}_\emptyset$). Sia $\mathcal{S}_\Gamma$ il radicale risolubile di $\mathcal{P}_\Gamma$. È facile vedere che il fattore di Levi $\mathcal{L}_\Gamma$ di $\mathcal{P}_\Gamma$ contenete T è σ stabile. Definiamo $G_\Gamma := \mathcal{L}_\Gamma^\sigma \mathcal{S}_\Gamma$. Infine denotiamo con $\mathcal{Z}_\Gamma$ il centro di $\mathcal{L}_\Gamma$ e poniamo $H_\Gamma := \mathcal{L}_\Gamma^\sigma \mathcal{Z}_\Gamma$.

Detto questo, se denotiamo con $\mathcal{O}_\Gamma$ la corrispondente $\mathcal{G}$-orbita in X, $\mathcal{O}_\Gamma$ è isomorfa, come $\mathcal{G}$-varietà, a $\mathcal{G}/G_\Gamma$. Da questo si ottiene che

$$\mathcal{A}_\Gamma := H_G{}^*(\mathcal{O}_\Gamma) \simeq H_G{}^*(\mathcal{G}/H_\Gamma).$$

Ora dato $\Gamma' \supset \Gamma$ si ha chiaramente che $\mathcal{Z}_{\Gamma'} \supset \mathcal{Z}_\Gamma$ e $\mathcal{L}_\Gamma \supset \mathcal{L}_{\Gamma'}$. Ne segue subito che il gruppo $H_\Gamma^{\Gamma'} := \mathcal{L}_{\Gamma'}^\sigma Z_\Gamma$ è contenuto sia in H_Γ che in $H_{\Gamma'}$. Posto $\mathcal{A}_\Gamma^{\Gamma'} := H_G{}^*(\mathcal{G}/H_\Gamma^{\Gamma'})$, si ottengono due omomorfismi

$$\phi_\Gamma^{\Gamma'} : \mathcal{A}_\Gamma \to \mathcal{A}_\Gamma^{\Gamma'} \text{ e}$$
$$\psi_\Gamma^{\Gamma'} : \mathcal{A}_{\Gamma'} \to \mathcal{A}_\Gamma^{\Gamma'}.$$

Teorema 6.3. *$H_G^*(X)$ è isomorfo, come anello, al sottoanello dell'anello $\oplus_{\Gamma\subset\Delta_1}\mathcal{A}_\Gamma$ formato dalle successioni $(a_\Gamma)_{\Gamma\subset\Delta_1}$, con $a_\Gamma \in \mathcal{A}_\Gamma$, tali che per ogni $\Gamma' \supset \Gamma$, $\phi_\Gamma^{\Gamma'}(a_\Gamma) = \psi_\Gamma^{\Gamma'}(a_{\Gamma'})$.*

In vari casi gli anelli $\mathcal{A}_\Gamma$ e le applicazioni ϕ_Γ e ψ_Γ sono stati esplicitamente determinati [52] e [45].

Notiamo inoltre che l'inclusione $G_\Gamma \subset \mathcal{G}$ induce, per ogni $\Gamma \subset \Delta$, un omomorfismo

$$H_G^*(pt) \to \mathcal{A}_\Gamma,$$

e dunque un omomorfismo diagonale $H_G^*(pt) \to \oplus_{\Gamma\subset\Delta_1}\mathcal{A}_\Gamma$ la cui immagine è contenuta in $H_G^*(X)$. Denotiamo allora con I l'ideale di $H_G^*(X)$ generato dall'immagine degli elementi di grado positivo in $H_G^*(pt)$. Allora

Proposizione 6.4. *$H^*(X) \simeq H_G^*(X)/I$.*

Si noti che questi risultati, pur dando una descrizione esplicita della coomologia sia equivariante che ordinaria di X, non sono del tutto soddisfacenti dato che non forniscono ne generatori ne tantomeno relazioni per gli anelli $H_G^*(X)$ e $H^*(X)$. Relativamente a questo problema non molto sembra essere noto.

Ricordiamo ora che abbiamo visto che X è una varietà i cui punti rappresentano sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{g}$. Dunque abbiamo un fibrato vettoriale tautologico M su X la cui fibra su un punto $x \in X$ è l'algebra di Lie rappresentata da x. M è dotato di un'ovvia $\mathcal{G}$ linearizzazione. La seguente affermazione potrebbe essere vera:

Affermazione 6.5. $H_G^*(X)$ è generato dalle classi di Chern equivarianti del fibrato M, dei fibrati lineari su X e dall'immagine di $H_G(pt)$.

Svolgendo i calcoli, nel caso della compattificazione del gruppo G, il Teorema 6.3 fornisce il seguente risultato, che credo non appaia in stampa. Prendiamo il solito toro massimale $T \subset G$ e due copie V_1 e V_2 dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X^*(T), \mathbb{Q})$. Sia $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ l'insieme delle radici semplici. L'anello delle funzioni polinomiali su $V_1 \oplus V_2$ si può identificare con l'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]$ con $x_i(v_1, v_2) = v_1(\alpha_i)$ e $y_i(v_1, v_2) = v_2(\alpha_i)$. Dato un monomio $m = y_1^{h_1} \cdots y_r^{h_r}$ definiamo supp $m = \{i | h_i > 0\}$. Si ha

Teorema 6.6. *Sia X la compattificazione meravigliosa del gruppo G. Allora $H_{G\times G}^*(X)$ è isomorfo al sottoanello di $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r]$ generato dagli elementi della forma $P(x_1, \ldots x_r)y_1^{h_1} \cdots y_r^{h_r}$ con $P(x_1, \ldots x_r)$ un polinomio* *invariante rispetto al sottogruppo del gruppo di Weyl* W *di* G*, generato dalle riflessioni semplici* s_j *con* j *non appartenente al supporto di* $y_1^{h_1} \cdots y_r^{h_r}$.

Rimane da dire qualcosa sulle orbite di X rispetto a vari sottogruppi di $\mathcal{G}$. Ci limiteremo a brevi cenni. Per prima cosa consideriamo un sottogruppo di Borel $B \subset \mathcal{G}$. In questo caso è ben noto che B ha un numero finito di orbite in X. Una classificazione di tali orbite in termini di involuzioni speciali nel gruppo di Weyl è stata data in una serie di lavori di Richardson e Springer [42],[43][50]. Nel caso della compattificazione del gruppo alcune proprietà geometriche delle chiusure di B orbite sono state investigate in [7].

Infine se consideriamo il sottogruppo diagonale G in $G \times G$, le sue orbite sulla compattificazione del gruppo G coincidono chiaramente con le classi coniugate di G se ci restringiamo alla $G \times G$ orbita aperta che è isomorfa a G. Sono dunque ben note. La classificazione delle G-orbite in X è stata recentemente ottenuta in [33]. Proprietà relative alla loro incidenza e alla chiusura del cono unipotente in X, sono state investigate in [15] e [63]. Molto poco sembra essere noto sulla struttura delle G orbite nella compattificazione meravigliosa di $\mathcal{G}/G$ con G sottogruppo dei punti fissi rispetto ad una involuzione arbitraria.

Riferimenti bibliografici

[1] A. R. Alguneid, Complete quadric primals in four-dimensional space. Proc. Math. Phys. Soc. Egypt 4 (1952), no. 4, 93–104 (1953).

[2] A. Białynicki-Birula, Some theorems on actions of algebraic groups, Ann. of Math. 98 (1973), 480-497.

[3] E. Bifet, C. De Concini, C. Procesi, Cohomology of regular embeddings. Adv. Math. 82 (1990), no. 1, 1–34.

[4] M. Brion and S. P. Inamdar, Frobenius splitting of spherical varieties, in: Algebraic Groups and their Generalizations: Classical Methods (University Park, PA,1991), 207–218, Proc. Sympos. Pure Math., 56, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[5] M. Brion, The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition, *Comment. Math. Helv.* **73** (1998), 137-174.

[6] M. Brion, Group completions via Hilbert schemes. J. Algebraic Geom. 12 (2003), no. 4, 605–626.

[7] M. Brion and P. Polo: Large Schubert varieties, *Representation Theory* **4** (2000), 97-126.

[8] E. Casas-Alvero, E. Xambó-Descamps, The enumerative theory of conics after Halphen. Lecture Notes in Mathematics, 1196. Berlin etc.: Springer-Verlag. IX, 130 p. DM 21.50 (1986).

[9] R. Chirivì; A. Maffei, The ring of sections of a complete symmetric variety. J. Algebra 261 (2003), no. 2, 310–326

[10] R. Chirivì; A. Maffei, Projective normality of complete symmetric varieties. Duke Math. J. 122 (2004), no. 1, 93–123.

[11] C. De Concini and C. Procesi. Complete symmetric varieties, in: Invariant Theory, p. 1-44, Lect. Notes in Math., nr. 996, Springer, 1983.

[12] C. De Concini and C. Procesi. Complete symmetric varieties. II: Intersection theory. (English) Algebraic groups and related topics, Proc. Symp., Kyoto and Nagoya/Jap. 1983, Adv. Stud. Pure Math. 6, 481-513 (1985).

[13] C. De Concini and T. A. Springer, Betti numbers of complete symmetric varieties, in: Geometry Today, p. 87-107, Birkhäuser, 1985.
[14] C. De Concini and T. A. Springer: Compactification of symmetric varieties, *Transform. Groups* **4** (1999), 273-300.
[15] F. Esposito, Tesi di dottorato, Roma 2004 (in preparazione).
[16] G. Faltings, Explicit resolution of local singularities of moduli-spaces, J. Reine Angew. Math. 483 (1997), 183–196.
[17] J.A. Finat, Combinatorial presentation of the variety of complete quadrics. Géométrie algébrique et applications, I (La Rábida, 1984), 59–77, Travaux en Cours, 22, Hermann, Paris, 1987.
[18] G. Gherardelli, Sul modello minimo della varietá degli elementi differenziali del 2° ordine del piano projettivo. (Italian) Atti Accad. Italia. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (7) 2, (1941). 821–828.
[19] S. Kannan, Remarks on the wonderful compactification of semisimple algebraic groups. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 109 (1999), no. 3, 241–256.
[20] S. Kannan, Projective normality of the wonderful compactification of semisimple adjoint groups. Math. Z. 239 (2002), no. 4, 673–682.
[21] Kato, Syu A Borel-Weil-Bott type theorem for group completions. J. Algebra 259 (2003), no. 2, 572–580.
[22] G. Kempf, F.F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal embeddings. I. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. viii+209 pp.
[23] F. Knop, The Luna-Vust theory of spherical embeddings, in: Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups, p. 226-249, Madras, 1991.
[24] M. Koppinen, Good bimodule filtrations for coordinate rings. J. London Math. Soc. (2) 30 (1984), no. 2, 244–250.
[25] S. Kumar, Proof of the Parthasarathy-Ranga Rao-Varadarajan conjecture. Invent. Math. 93, No.1, 117-130 (1988).
[26] W. Ihle; K. Drechsler, Complete quadrics. Math. Nachr. 122 (1985), 175–185.
[27] L. Lafforgue: Pavages des simplexes, schémas de graphes recollés et compactification des $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$, *Invent. math.* **136** (1999), 233-271.
[28] P. Littelmann Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac-Moody algebras. J. Am. Math. Soc. 11, No.3, 551-567 (1998).
[29] P. Littelmann and C. Procesi: Equivariant cohomology of wonderful compactifications, in: Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989), 219-262, Progr. Math. **92**, Birkhäuser 1990.
[30] D. Luna, Toute Variétés magnifique est sphériques. Transform. Groups 1 (1996), no. 3, 249–258.
[31] D. Luna, . Variétés sphériques de type A. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 94 (2001), 161–226.
[32] D. Luna, Sur les plongements de Demazure. Special issue in celebration of Claudio Procesi's 60th birthday. J. Algebra 258 (2002), no. 1, 205–215.
[33] G. Lusztig, Parabolic character sheaves, II, math.RT/0302317.
[34] V. B., Mehta and A. Ramanathan, Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties. Ann. of Math. (2) 122 (1985), no. 1, 27–40.
[35] Y. A.Neretin, Geometry of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ at infinity: hinges, complete collineations, projective compactifications, and universal boundary. The orbit method in geometry and physics (Marseille, 2000), 297–327, Progr. Math., 213, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.
[36] Yu. A. Neretin, *Hinges and the Study–Semple–Satake–Furstenberg–De Concini–Procesi–Oshima boundary*, Kirillov's Seminar on Representation Theory, AMS Transl. (2) **181** (1998), 165–230.
[37] M. S. Putcha, *Linear algebraic monoids*, Cambridge University Press, 1988.

[38] M. S. Putcha, *Monoids on groups with BN pair*, J. Algebra **120** (1989), 139–169.
[39] M. S. Putcha, L. E. Renner, *The system of idempotents and the lattice of $\mathcal{J}$-classes of reductive algebraic monoids*, J. Algebra **116** (1988), 385–399.
[40] L. E. Renner, *Classification of semisimple algebraic monoids*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), 193–223.
[41] L. E. Renner, *Classification of semisimple varieties*, J. Algebra **122** (1989), 275–287.
[42] R. W. Richardson, Orbits, invariants and representations associated to involutions of reductive groups, Inv. Math. 71 (1983), 287-312.
[43] R. W. Richardson and T. A. Springer, The Bruhat order on symmetric varieties, Geom. Dedic. 35 (1990), 389-436.
[44] A. Rittatore, *Algebraic monoids and group embeddings*, Transformation Groups **3** (1998), 375–396.
[45] R. Scognamillo, The canonical combinatorial sheaf associated to an involution of a semisimple adjoint group. Case A_n. Math. Z. 212, No.4, 545-554 (1993).
[46] J. G. Semple, On complete quadrics. J. London Math. Soc. 23, (1948). 258–267.
[47] J. G. Semple, The variety whose points represent complete collineations of S_r on S'_r. Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) 10, (1951). 201–208.
[48] J. G. Semple, On complete quadrics. II. J. London Math. Soc. 27, (1952). 280–287.
[49] T. A. Springer, Some results on algebraic groups with involutions, in: Algebraic Groups and Related Topics, p. 525-543, Kinokuniya/North-Holland, 1985.
[50] T. A. Springer, The classification of involutions of simple algebraic groups, Journal Fac. Sci. Tokyo University, 34 (1987), 655-670.
[51] E. Strickland, A vanishing theorem for group compactifications, Math. Ann. 277 (1987), no. 1, 165–171.
[52] Strickland, Elisabetta Computing the equivariant cohomology of group compactifications. (English) Math. Ann. 291, No.2, 275-280 (1991).
[53] E. S. Strickland, *Computing the equivariant cohomology of group compactifications*, Math. Ann. **291** (1991), no. 2, 275–280.
[54] A. Tchoudjem, Cohomologie des fibrés en droites sur les compactifications des groupes réductifs. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 37 (2004) no. 3, 415–448.
[55] M. Thaddeus, Complete collineations revisited, *Math. Ann.* **315** (1999), 489-495.
[56] D. A. Timashev, Equivariant compactifications of reductive groups. (in russo) Mat. Sb. 194 (2003), no. 4, 119–146; traduzione in Sb. Math. 194 (2003), no. 3-4, 589–616
[57] J. A. Tyrrell, Complete quadrics and collineations in S_n. Mathematika 3 (1956), 69–79.
[58] T. Uzawa, On equivariant completions of algebraic symmetric spaces, in: Algebraic and Topological Theories, p. 569-577, Kinokuniya/North-Holland, 1985.
[59] I. Vainsencher,Schubert calculus for complete quadrics. Enumerative geometry and classical algebraic geometry (Nice, 1981), pp. 199–235, Progr. Math., 24, Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.
[60] I. Vainsencher, Complete collineations and blowing up determinantal ideals. Math. Ann. 267 (1984), no. 3, 417–432.
[61] E. B. Vinberg, *On reductive algebraic semigroups*, Lie Groups and Lie Algebras: E. B. Dynkin Seminar (S. Gindikin, E. Vinberg, eds.), AMS Transl. (2) **169** (1995), 145–182.
[62] T. Vust, Plongements d'espaces symétriques algébriques: Une classification. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 17, No.2, 165-195 (1990). math.RT/0410199 [abs, ps, pdf, other] :
[63] Xuhua He, Unipotent variety in the group compactification, math.RT/0410199.