ALGEBRA 2: QUARTO FOGLIO DI ESERCIZI

(1) Mostrare che $2\cos(2\pi/7)$ è algebrico su $\mathbb{Q}$. Qual è il suo grado?
(2) Determinare il polinomio minimo di $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ e di $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$.
(3) Determinare il polinomio minimo di $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, dove p, q, r sono primi distinti.
(4) Decomporre in fattori irriducibili di $\mathbb{Q}[x]$ i seguenti polinomi: x^4+1, x^4+2, x^4+4.
(5) Mostrare che i campi $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1), \mathbb{F}_2[x]/(x^3+x^2+1)$ sono isomorfi. Quanti elementi possiedono? Contengono sottocampi con 4 elementi?
(6) Dire se i campi $\mathbb{R}[x]/(x^2+1), \mathbb{R}[x]/(x^2+x+1)$ siano isomorfi.
(7) Sia $\mathbb{K}$ un campo, $\mathbb{F}=\mathbb{K}[x]/(x^4+1)$. Mostrare che $\alpha=[x]$ è invertibile, e $(\alpha+\alpha^{-1})^2=2$. Sotto quali ipotesi $\mathbb{F}$ è un campo?
(8) Quanti sono gli elementi irriducibili di $\mathbb{F}_p[x]$ che hanno grado $2, 3, 6$?
(9) Determinare tutti i sottocampi di $\mathbb{F}_{729}$.
(10) Mostrare che $\mathbb{C}$ non è la chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$. Le chiusure algebriche di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{Q}(x)$ sono isomorfe?
(11) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un omomorfismo invertibile di anelli (o meglio, un automorfismo di $\mathbb{R}$). Mostrare che $f=\mathrm{id}_R$.
(12) Mostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ha automorfismi diversi dall'identità.
(13) Calcolare tutti gli automorfismi dei campi $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$.
(14) Elencare tutti i sottocampi di $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
(15) Sia $\mathbb{K}$ un campo. Dire sotto quali ipotesi su $f(x)$ il quoziente $\mathbb{K}[x]/(f(x))$ sia un dominio d'integrità, un campo, possieda elementi nilpotenti diversi da 0.

Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma – "La Sapienza"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it