ALGEBRA 2: TERZO FOGLIO DI ESERCIZI

(1) Mostrare che A_4 è prodotto semidiretto di suoi sottogruppi propri.
(2) Mostrare che Q_4 non è prodotto semidiretto di suoi sottogruppi propri.
(3) Determinare tutti i prodotti semidiretti $N \rtimes_\phi H$ quando $N \simeq \mathrm{C}_5$ e $H \simeq \mathrm{C}_3$.
(4) Determinare tutti i prodotti semidiretti $N \rtimes_\phi H$ quando $N \simeq \mathrm{C}_7$ e $H \simeq \mathrm{C}_3$. Mostrare che, a meno di isomorfismi, si ottengono solo due gruppi: uno abeliano e uno non abeliano.
(5) Calcolare l'ordine del gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$. *[Qui e in seguito, quando p è primo, $\mathbb{F}_p$ indica il campo $\mathbb{Z}/(p)$.]*
(6) Mostrare che il gruppo $\mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$ è semplice, calcolandone le classi coniugate. *[Se non volete impazzire coniugando matrici, andate a rivedervi cos'è la forma canonica razionale.]*
(7) Mostrare che $\mathrm{Aut}(\mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3)$ è isomorfo a $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$. Più in generale, mostrare che $\mathrm{Aut}((\mathrm{C}_p)^n)$ è isomorfo a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.
(8) Calcolare $\mathrm{Aut}(\mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_2)$.
(9) Calcolare $\mathrm{Aut}(\mathrm{C}_{15})$ e mostrare che è isomorfo a $\mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_2$.
(10) Mostrare che ogni gruppo finito con più di due elementi possiede automorfismi non banali.
(11) Sia $H < G$, $[G : H] = n$. Mostrare che se $|G| > n!$, allora H contiene un sottogruppo normale non banale di G. *[Considerate l'azione di G sull'insieme G/H dei laterali sinistri di H in G.]*
(12) Sia $H < G$, $[G : H] = n$. Mostrare che se $|G|$ non divide $n!/2$, allora G possiede un sottogruppo normale non banale. *[Questa è semplicemente una versione più precisa dell'esercizio precedente: mostrate che G possiede un sottogruppo di indice 2, oppure H contiene un sottogruppo normale non banale di G.]*
(13) Mostrare che un sottogruppo di S_n di indice n è isomorfo a S_{n-1}.
(14) Quante trasposizioni ci sono in S_n? Per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste un'altra classe coniugata in S_n di elementi di ordine 2 con la stessa cardinalità di quella delle trasposizioni?
(15) Mostrare che un automorfismo di S_n che manda trasposizioni in trasposizioni è necessariamente interno.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it