ALGEBRA 2: SECONDO FOGLIO DI ESERCIZI

(1) Mostrare che se $(m), (n) < \mathbb{Z}$, allora $(m)+(n) = (d)$ e $(m)\cap(n) = (mn/d)$ dove $d = \mathrm{MCD}(m, n)$. *[Questa è per chi non si sia ancora svegliato... mn/d si chiama anche minimo comune multiplo, a proposito!]*
(2) Qual è l'ordine di $[a]$ nel gruppo $\mathbb{Z}/(n)$?
(3) Sia d un divisore di n. Quanti elementi di ordine d ci sono in $\mathbb{Z}/(n) \simeq \mathrm{C}_n$? Mostrare che

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n,$$

dove ϕ è la funzione di Eulero.
(4) Mostrare che ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico.
(5) Dimostrare o confutare: se ogni sottogruppo proprio di un gruppo finito G è ciclico, allora G è ciclico?
(6) Se G è un gruppo finito nel quale $g^d = 1$ ha al più d soluzioni, allora G è ciclico.
(7) Calcolare tutte le classi coniugate di S_4. Determinare tutti i sottogruppi normali di S_4.
(8) Calcolare tutte le classi coniugate di S_5 e D_4. Determinare tutti i sottogruppi normali di tali gruppi.
(9) Calcolare le classi di coniugio di D_4. Mostrare che D_4 non ha sottogruppi di ordine 6.
(10) Calcolare le classi di coniugio di D_n.
(11) Sia p un numero primo. Mostrare che se G ha ordine p^n, allora possiede sottogrupi normali di ordine p^h per ogni $0 \le h \le n$. *[Provate a ragionare per induzione, quozientando per un sottogruppo non banale di G]*
(12) Il sottogruppo derivato G' di un gruppo G è il sottogruppo generato da tutti gli elementi della forma $ghg^{-1}h^{-1}$ dove $g, h \in G$. Mostrare che:
- G è abeliano se e solo se $G' = \{\mathrm{id}\}$;
- G' è un sottogruppo normale di G, e G/G' è abeliano;
- se $N \lhd G$ è tale che G/N sia abeliano, allora $G' \subset N$. In particolare, G' è il più piccolo tra i sottogruppi normali di G a quoziente abeliano;
- se l'ordine di G è una potenza di un primo, allora $G' \neq G$. *[Sugg.: come al solito, per induzione, quozientando per un sottogruppo normale opportuno]*

(13) Calcolare il derivato di $\mathrm{D}_4, \mathrm{S}_4, \mathrm{D}_5, \mathrm{S}_5$.
(14) Un gruppo G si dice *risolubile* se ponendo $G^{(0)} = G, G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$, si ha che $G^{(N)} = \{\mathrm{id}\}$ per valori sufficientemente grandi di N. Mostrare che:
- ogni gruppo abeliano è risolubile;
- D_4 e S_4 sono risolubili;
- D_5 e S_5 non sono risolubili;
- se $|G|$ è potenza di un primo, allora G è risolubile;
- sottogruppi e quozienti di un gruppo risolubile sono risolubili;
- se $N \lhd G$ e G/N sono entrambi risolubili, allora G è risolubile; *[Sugg.: fate vedere che se G/N è risolubile, allora $G^{(i)} \subset N$ per i sufficientemente grande]*
- se $H < G$ e $N \lhd G$ sono entrambi risolubili, allora HN è risolubile.

(15) Sia G un gruppo, $\mathfrak{X}_n$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di G di ordine (cioè cardinalità) n. La moltiplicazione sinistra di G definisce allora un'azione di G su $\mathfrak{X}_n$:

$$g.X = \{gx \mid x \in X\}.$$

Mostrare che:
- se $X \in \mathfrak{X}_n$, allora $|\operatorname{Stab}(X)|$ divide n;
- ogni $X \in \mathfrak{X}_n$ è unione di laterali destri di $\operatorname{Stab}(X)$.

Come deve essere fatto X per avere stabilizzatore di ordine n?
(16) Se G e H sono gruppi, possiamo definire un'operazione sul prodotto cartesiano $G \times H$ ponendo $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$. Mostrare che questa operazione definisce su $G \times H$ una struttura di gruppo (detto *prodotto diretto* di G e H).
(17) Se $H < G$ e $x \in G$, allora xHx^{-1} è ancora un sottogruppo di G.
(18) Se $H < G$, allora $N = \bigcap_{x\in G} xHx^{-1}$ è un sottogruppo normale di G.
(19) Se $H, K < G$, definiamo $(h, k).x = hxk^{-1}, h \in H, k \in K, x \in G$.
- Mostrare che questo definisce un'azione di $H \times K$ su G.
- Mostrare che l'ordine dello stabilizzatore di $x \in G$ è $|H \cap xKx^{-1}|$.

[Le orbite per quest'azione sono dette laterali doppi]
(20) Mostrare che se $H, K \lhd$ soddisfano $H \cap K = \{\mathrm{id}\}, HK = G$, allora G è isomorfo al prodotto diretto $H \times K$.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it