ALGEBRA 2: PRIMO FOGLIO DI ESERCIZI

(1) Sia $\mathbb{H}$ il corpo dei *quaternioni* di Hamilton. Mostrare che il sottoinsieme
$$\mathbb{Q}_4 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$$
è un gruppo rispetto alla moltiplicazione, e che ogni sottogruppo di $\mathbb{Q}_4$ è normale.

(2) Mostrare che l'operazione
$$a * b = \begin{cases} a+b & \text{se } a \text{ è pari} \\ a-b & \text{se } a \text{ è dispari} \end{cases}$$
definisce una struttura di gruppo su $\mathbb{Z}$. Costruire, per ogni $n \geq 3$, un omomorfismo suriettivo da $(\mathbb{Z}, *)$ nel gruppo diedrale D_n.

(3) Sia G un gruppo nel quale $a^2 = 1$ per ogni $a \in G$. Mostrare che G è abeliano.

(4) Sia G un gruppo finito nel quale $a^2 = 1$ per ogni $a \in G$. Mostrare che $|G|$ è una potenza di 2. *[Sugg.: provate ad utilizzare un po' di algebra lineare!]*

(5) Sia $M = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ l'anello delle matrici $n \times n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$. Mostrate che se $A, B \in M$ soddisfano $AB = BA$, allora $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$, mentre questo è in generale falso se $AB \neq BA$.

(6) Sia G il sottogruppo di $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z}/(3))$ degli elementi triangolari superiori unipotenti (cioè con tutti 1 sulla diagonale). Mostrare che G non è abeliano, ma ogni $1 \neq g \in G$ ha ordine 3. Costruire un esempio simile per ogni primo dispari.

(7) Sia G un gruppo di ordine $2d$, con d dispari. Mostrare che G possiede un sottogruppo di indice 2. *[Sugg.: utilizzate l'immersione di Cayley ed argomenti di parità...]*

(8) Dato un gruppo $(G, \circ)$, definiamo su G l'operazione $a * b = b \circ a$. Mostrare che anche $(G, *)$ è un gruppo, ed esibire un isomorfismo esplicito tra $(G, \circ)$ e $(G, *)$.

(9) Se $H < G$, esibire una biiezione tra gli insiemi $H\backslash G$ e G/H dei laterali destri e sinistri di H in G. *[Questo mostra che il concetto di indice non dipende dalla mano con la quale scrivete anche se G è infinito!]*

(10)
- Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra insiemi. Mostrate che $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ per ogni $B \subset Y$. In particolare, se f è suriettiva, allora $f(f^{-1}(B)) = B$ per ogni scelta di $B \subset Y$.
- Sia $N \lhd G$, e $\pi : G \to G/N$ la proiezione al quoziente. Mostrare che se $\overline{H} < G/N$, allora $\pi(\pi^{-1}(\overline{H})) = \overline{H}$.
- Nelle stesse ipotesi, mostrare che se $H < G$ allora $\pi^{-1}(\pi(H)) = HN$ e quindi che $N < H \Rightarrow \pi^{-1}(\pi(H)) = H$.

(11) Sia $f : G \to H$ un omomorfismo di gruppi. Mostrare che se $K < H$, allora $f^{-1}(K) < G$. Mostrare inoltre che se $K \lhd H$ allora $f^{-1}(K) \lhd G$.

(12) Sia $f : G \to H$ un omomorfismo di gruppi. Mostrare che se $K < G$, allora $f(K) < H$. E' vero che se $K \lhd G$ allora $f(K) \lhd H$? E' vero se f è suriettiva?

(13) Sia $N \lhd G$. Utilizzare gli ultimi tre esercizi per costruire una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di G/N e i sottogruppi di G che contengono N, in modo che a sottogruppi normali corrispondano sottogruppi normali.

(14) Dimostrare il teorema di omomorfismo: se $N \lhd G$ e l'omomorfismo $f : G \to H$ soddisfa $N < \ker f$, allora esiste un (unico) omomorfismo $F : G/N \to H$ tale che $f = F \circ \pi$, dove $\pi : G \to G/N$ è la proiezione al quoziente. Inoltre le immagini di f ed F coincidono, ed F è iniettiva se e solo se $\ker f = N$.

(15) Dimostrare le seguenti conseguenze del teorema di omomorfismo:
- Se $f : G \to H$ è un omomorfismo di gruppi, allora $[g] \to f(g)$ definisce un isomorfismo di $G/\ker f$ con $f(G)$.
- Se $N \subset H$ sono sottogruppi normali in G, allora G/H è isomorfo a $(G/N)/(H/N)$, dove abbiamo indicato con H/N l'immagine di H in G/N attraverso la proiezione al quoziente.
- Se $H < G, N \lhd G$, allora $N \lhd HN, H \cap N \lhd H$, e $HN/N \simeq H/(H \cap N)$.

(16) Utilizzare il teorema di omomorfismo per mostrare che se G è ciclico di ordine n, allora è isomorfo a $(\mathbb{Z}/(n), +)$.

Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma – "La Sapienza"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it