ALGEBRA 2 — Sesto esame scritto
30 gennaio 2013

(1) Indichiamo con σ la permutazione $(123)(45)(67) \in \mathrm{A}_7$, e con Q_4 il gruppo delle unità dei quaternioni. Quanti sono i coniugati di $(\sigma, -j) \in \mathrm{A}_7 \times \mathrm{Q}_4$?

Soluzione: In un prodotto cartesiano $G \times H$ i coniugati dell'elemento (x, y) sono tutti quelli della forma $(g, h)(x, y)(g, h)^{-1} = (g, h)(x, y)(g^{-1}, h^{-1}) = (gxg^{-1}, hyh^{-1})$. Pertanto per calcolare i coniugati di (x, y) in $G \times H$ è sufficiente calcolare separatamente i coniugati di x in G e quelli di h in H.

Per quanto riguarda i coniugati di $-j$ in Q_4, il conto è già stato svolto a lezione: $-j$ commuta sicuramente con le proprie 4 potenze: $\pm 1, \pm j$. Tuttavia non è centrale – ad esempio, non commuta con i. Il suo centralizzatore ha almeno ordine 4, e non è l'intero gruppo. Dal momento che Q_4 possiede 8 elementi, e per il Teorema di Lagrange, $|Z(-j)|$ divide $|\,\mathrm{Q}_4\,|$, il centralizzatore $Z(-j)$ ha necessariamente ordine 4.

Il numero di coniugati di $-j$ è allora uguale all'indice $[\mathrm{Q}_4 : Z(-j)] = 2$. Si può facilmente verificare che l'altro coniugato di $-j$ è $j = i(-j)i^{-1}$.

Il calcolo della classe coniugata di σ in A_7 si calcola come più volte fatto. Gli elementi coniugati a σ in S_7 sono tutti e soli quelli con la stessa struttura ciclica, che sono

$$\binom{7}{3} \cdot 2! \cdot \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2}{3 \cdot 2} \cdot \frac{6}{2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Questo mostra che $[\mathrm{S}_7 : Z_{\mathrm{S}_7}(\sigma)] = 210$. Sappiamo che σ commuta con almeno una permutazione dispari – ad esempio, il suo ciclo $(6\,7)$ – e quindi $Z_{\mathrm{A}_7}(\sigma)$, essendo intersezione propria tra un sottogruppo di S_7 e il sottogruppo A_7 di indice 2, possiede la metà degli elementi di $Z_{\mathrm{S}_7}(\sigma)$. Allora

$$[\mathrm{A}_7 : Z_{\mathrm{A}_7}(\sigma)] = \frac{|\,\mathrm{A}_7\,|}{|Z_{\mathrm{A}_7}(\sigma)|} = \frac{|\,\mathrm{S}_7\,|/2}{|Z_{\mathrm{S}_7}(\sigma)|/2} = \frac{|\,\mathrm{S}_7\,|}{|Z_{\mathrm{S}_7}(\sigma)|} = [\mathrm{S}_7 : Z_{\mathrm{S}_7}(\sigma)] = 210.$$

In conclusione, $-j$ possiede due coniugati in Q_4 e σ possiede 210 coniugati in A_7. Complessivamente, $(\sigma, -j)$ avrà $210 \cdot 2 = 420$ coniugati in $\mathrm{A}_7 \times \mathrm{Q}_4$.

(2) Calcolare il campo di spezzamento, e la struttura del corrispondente gruppo di Galois, del polinomio $x^4 + x^2 - 1 \in \mathbb{F}_{11}[x]$.

Soluzione: Calcolando le radici $x = 5, 6$ del polinomio, si giunge rapidamente alla fattorizzazione $x^4 + x^2 - 1 = (x - 5)(x - 6)(x^2 + 4)$. Si verifica nuovamente, sostituendo gli undici valori di $\mathbb{F}_{11}$, che $x^2 + 4$ non possiede zeri nel campo; essendo di grado due, e non avendo fattori lineari, deve essere irriducibile. Ricapitolando, il campo di spezzamento L di $x^4 + x^2 - 1$ concide con quello del polinomio irriducibile $x^2 + 4$.

Sia α una radice di $x^2 + 4$ in L; il polinomio minimo di α su $\mathbb{F}_{11}$ è allora proprio $x^2 + 4$, e α è algebrico di grado 2. Equivalentemente, $[\mathbb{F}_{11}(\alpha) : \mathbb{F}_{11}] = 2$.

Se α è una radice di $x^2 + 4$, l'altra radice non può che essere $-\alpha$, e quindi il campo di spezzamento $L = \mathbb{F}_{11}(\alpha, -\alpha)$ coincide con $\mathbb{F}_{11}(\alpha)$. Si tratta di un'estensione di $\mathbb{F}_{11}$ di grado 2, che è quindi isomorfa a $\mathbb{F}_{121}$. Il gruppo di Galois, come sempre nel caso di estensioni tra campi finiti, è ciclico e generato dal Frobenius. Poiché ogni estensione tra campi finiti è di Galois, l'ordine del gruppo di Galois coincide con il grado dell'estensione. In conclusione, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_{11}) \simeq \mathrm{C}_2$.

(3) Calcolare il campo di spezzamento, e la struttura del corrispondente gruppo di Galois, del polinomio $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Soluzione: Il prodotto $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$ è uguale a $x^6 - 1$. Questo mostra che le quattro radici complesse di $x^4 + x^2 + 1$ sono tutte radici seste dell'unità : più precisamente, sono le quattro radici seste $\pm\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ diverse da ± 1.

Queste radici sono tutte contenute nell'estensione quadratica $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. D'altronde, si vede subito che $x^4 + x^2 + 1$ non ha radici reali – se x è reale, $x^4 + x^2 + 1$ è strettamente positivo – e quindi nemmeno razionali. Il campo di spezzamento L deve estendere $\mathbb{Q}$ strettamente. In conclusione,

$$\mathbb{Q} \subsetneq L \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-3}),$$

da cui

$$1 < [L : \mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) : \mathbb{Q}] = 2,$$

e quindi necessariamente $[L : \mathbb{Q}] = 2$.

Siamo in caratteristica 0, e quindi un campo di spezzamento costituisce sempre un'estensione di Galois del campo base. Il gruppo di Galois ha allora ordine 2, ed è quindi isomorfo a C_2.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÃ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it