ALGEBRA 2 — Quarto esame scritto
12 settembre 2012
soluzioni

(1)

- [4pt] Il centralizzatore di $\sigma = (1\,2\,3)(4\,5\,6\,7\,8\,9)$ in S_9 è ciclico?

  Soluzione: σ commuta sicuramente sia con $(1\,2\,3)$ che con $(4\,5\,6\,7\,8\,9)$ che generano un sottogruppo non ciclico isomorfo a $C_3 \times C_6$. Il centralizzatore contiene allora un sottogruppo non ciclico, e non può quindi essere ciclico.

- [3pt] Quanti elementi ha?

  Soluzione: Il numero dei coniugati di σ si calcola facilmente, ed è uguale a
$$\binom{9}{3} \cdot 2! \cdot 5! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{9!}{18}.$$
  Di conseguenza, il centralizzatore di σ possiede 18 elementi, cioè tutti e soli quelli del punto precedente.

(2) • [3pt] G è un gruppo abeliano di ordine 30. Quanti elementi di ordine 15 contiene?

Soluzione: Ogni elemento di ordine 15 genera l'unico sottogruppo (ciclico) di ordine 15 di G. Pertanto, il numero di elementi di ordine 15 è $\phi(15) = 8$.

• [4pt] G è un gruppo non abeliano di ordine 30. Quanti elementi di ordine 15 contiene?

Soluzione: L'ordine di G è il doppio di un dispari, e quindi G possiede sicuramente un sottogruppo H di indice 2, di ordine $15 = 3 \cdot 5$, e quindi ciclico, poiché 3 non divide $5 - 1$.
H è anche l'unico sottogruppo di ordine 15. Se $H, K < G$ hanno entrambi ordine 15, allora da $30 \geq |HK| = 15 \cdot 15/|H \cap K|$ segue $|H \cap K| \geq 15/2$, e quindi $H = K$ per il Teorema di Lagrange. A questo punto, possiamo procedere come prima, e concludere che G possiede 8 elementi di ordine 15.

Per dimostrare l'unicità del sottogruppo di ordine 15, si può procedere anche nel seguente modo: in un gruppo ciclico di ordine 15, i sottogruppi di ordine 3 e 5 sono unici, e quindi caratteristici; essendo caratteristici in un sottogruppo normale, sono pertanto normali in G. Questo mostra che il 3- e il 5-Sylow di G sono entrambi normali, e quindi unici. Ogni sottogruppo di G di ordine 15 deve contenere un 3- e un 5-Sylow di G, e quindi non può che essere uguale al prodotto dell'unico 3-Sylow con l'unico 5-Sylow di G.

(3)

- [4pt] Qual è il campo di spezzamento L del polinomio $(x^4-3)(x^4-2) \in \mathbb{F}_5[x]$.

  Soluzione: Nessuno dei due fattori ha radici in $\mathbb{F}_5$, poiché la quarta potenza di ogni suo elemento non nullo vale 1; di conseguenza ciascuno di essi è irriducibile, oppure si spezza nel prodotto di due fattori di grado 2. Proviamo col primo.
  Se $x^4+2=(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)$, allora

  $$\begin{cases} b+c=a^2 \\ a(b-c)=0 \\ bc=2 \end{cases}$$

  Dalla seconda equazione, $a=0$ oppure $b=c$. Se $a=0$, allora dalla prima $b=-c$ e quindi $b^2=-2=3$, che non ha soluzione in $\mathbb{F}_5$. Se $b=c$, allora $b^2=2$ che non ha soluzione in $\mathbb{F}_5$. Allo stesso modo, si può vedere che anche x^4-2 è irriducibile: tuttavia questa informazione è superflua, e ci basta sapere che, non avendo radici nel campo $\mathbb{F}_5$, esso è irriducibile, oppure il prodotto di due polinomi di secondo grado.
  Il campo di spezzamento L deve avere almeno grado 4, poiché contiene almeno una radice di almeno uno dei fattori irriducibili di grado 4. Ad ogni modo, in $\mathbb{F}_{5^4}$ si spezza ogni polinomio irriducibile di grado che divide 4, e quindi $[L:\mathbb{F}_5]=4$, cioè $L \simeq \mathbb{F}_{625}$.

- [4pt] Mostrare che L contiene un unico sottocampo K con 25 elementi, e descrivere $\mathrm{Gal}(L/K)$.

  Soluzione: L è un'estensione di Galois di $\mathbb{F}_5$ e il gruppo $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_5)$ è ciclico (di ordine 4) e generato dal Frobenius. Per la corrispondenza di Galois, l'esistenza di un'unica estensione intermedia K di grado 2 su $\mathbb{F}_5$, segue dall'esistenza di un unico sottogruppo $\langle F^2\rangle$ di indice 2 in $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_5)=\langle F\rangle \simeq \mathrm{C}_4$. Si ha allora $\mathrm{Gal}(L/K)=\langle F^2\rangle \simeq \mathrm{C}_2$.

(4) Sia $\alpha = \sqrt[8]{2}$.

- [2pt] Calcolare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

  Soluzione: α soddisfa il polinomio $x^8 - 2$, che è irriducibile su $\mathbb{Z}$ grazie al Criterio di Eisenstein, e conseguentemente su $\mathbb{Q}$ per il Lemma di Gauss.

- [2pt] Calcolare almeno una radice ottava complessa primitiva di 1.

  Soluzione: Basta prendere
  $$\omega = \cos 2\pi/8 + i \sin 2\pi/8 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

- [2pt] Sia L la più piccola estensione di Galois di $\mathbb{Q}$ che contenga α. Spiegare per quale motivo $[L : \mathbb{Q}] = 16$.

  Soluzione: Stiamo parlando del campo di spezzamento di $x^8 - 2$. Le radici (complesse) di tale polinomio sono $\omega^j \sqrt[8]{2}$, e quindi L contiene sicuramente sia $\sqrt[8]{2}$ che le potenze di ω.
  In particolare, $i \in L$ e quindi L contiene $\mathbb{Q}(\alpha, i)$. Poiché $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$, dal momento che $i \notin \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}$ soddisfa un polinomio di grado 2, abbiamo $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}] = 16$, e $L \supset \mathbb{Q}(\alpha, i)$ ha almeno grado 16 su $\mathbb{Q}$.
  Ci viene quindi chiesto di mostrare che $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$. Ora, sappiamo che $L = \mathbb{Q}(\alpha, \omega)$, e sicuramente $\mathbb{Q}(\alpha, i) \subset \mathbb{Q}(\alpha, \omega)$ poiché $i = \omega^2$. Più sorprendente è l'altra inclusione, che segue immediatamente da
  $$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{1}{\alpha^4}(1+i) \in \mathbb{Q}(\alpha, i).$$

- [2pt] Descrivere $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

  Soluzione: Un'osservazione preliminare: se $\phi \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, allora $\phi(\sqrt[8]{2})$ è una delle 8 radici complesse di $x^8 - 2$, e quindi $\phi(\alpha) = \omega^j \alpha$ per qualche $j = 0, ..., 7$. Fissata l'immagine di α, ϕ è allora determinato dall'immagine di i che può solo essere $\pm i$, poiché $\mathbb{Q}(i)$ è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$. ϕ è anche determinato dalla sua azione sulle 8 radici, che potrebbe — ma non è, purtroppo — essere quella del diedrale D_8. Ne è, invece, una versione *un po' storta*.
  In effetti, se $\phi(\alpha) = \omega^j \alpha$, allora
  $$\phi(\sqrt{2}) = \phi(\alpha^4) = \omega^{4j}\alpha^4 = (-1)^j \sqrt{2}.$$
  Consideriamo i due automorfismi
  $$c : \begin{cases} \alpha \mapsto \alpha \\ i \mapsto -i \end{cases}, \qquad \rho : \begin{cases} \alpha \mapsto \omega\alpha \\ i \mapsto i \end{cases}.$$
  Se numeriamo le radici di $x^8 - 2$ in senso antiorario a partire da α con i numeri da 0 a 7, la coniugazione complessa c induce la permutazione $(1\,7)(2\,6)(3\,5)$. L'azione di ρ è lievemente più complicata da calcolare.
  Iniziamo notando che $\rho(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Ricordando che $\omega = (1+i)/\sqrt{2}$, si ottiene $\rho(\omega) = -(1+i)/\sqrt{2} = -\omega = \omega^5$. Facendo i conti, ϕ induce la permutazione $(0\,1\,6\,7\,4\,5\,2\,3)$. Nessuna potenza di tale permutazione è prodotto di tre trasposizioni disgiunte. Possiamo concludere che ρ genera un sottogruppo (normale) di ordine 8, c uno di ordine 2, e $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ è prodotto semidiretto di tali due sottogruppi. Per determinare completamente la struttura, calcoliamo $c\rho c^{-1}$; la sua azione come permutazione è $(0\,7\,2\,1\,4\,3\,6\,5)$ che è la stessa di ρ^3. Pertanto c coniuga ρ in ρ^3, e ρ^j in ρ^{3j}.

Questo prodotto semidiretto NON E' (isomorfo a) il gruppo diedrale D_8, ma ci va molto vicino. Gli elementi della forma $\rho^j c$ hanno ordine 2 se j è pari, e 4 se j è dispari.
I conti erano fastidiosi, quindi in questa parte mi accontenterò di qualsiasi affermazione non banale su $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$: la sua non abelianità; l'esistenza di un sottogruppo di ordine 8; la decomposizione come prodotto semidiretto; il calcolo esplicito della permutazione indotta sulle radici per un automorfismo che non sia l'identità o la coniugazione complessa; l'osservazione che qualche suo elemento debba agire non banalmente su $\sqrt{2}$; l'osservazione che da $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \subset \mathrm{S}_8$ si possono escludere molti gruppi di ordine 16.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it