ALGEBRA 2 — Terzo esame scritto
3 settembre 2012

(1)
- [4pt] Esistono omomorfismi suriettivi $\mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_3$? Se sì, quanti sono?
- [4pt] Esistono omomorfismi suriettivi $\mathrm{S}_5 \to \mathrm{S}_4$? Se sì, quanti sono?

(2) G è un gruppo di ordine 374.
- [2pt] Mostrare che G è prodotto semidiretto di un sottogruppo di ordine 2 e di un sottogruppo normale ciclico di ordine 187.
- [2pt] Esibire quattro gruppi di ordine 374, a 2 a 2 non isomorfi, e spiegare perché non lo siano.
- [3pt] Spiegare perché G sia necessariamente isomorfo ad uno dei quattro gruppi elencati.

(3) E' dato il polinomio $f(x) = x^5 - 2 \in \mathbb{F}_7[x]$.
- [3 pt] Sia K un'estensione finita di $\mathbb{F}_7$. Mostrare che se $\omega \in K \setminus \mathbb{F}_7$ è una radice di f, allora ω ha ordine 15 nel gruppo moltiplicativo K^*.
- [2 pt] Mostrare che il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_7)$ del campo di spezzamento L di f ha ordine 2 o 4.
- [3 pt] Determinare la struttura di $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_7)$.

(4) Se α, β, γ le tre radici complesse del polinomio $g(x) = x^3 + x - 3$, sia $F = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$.
- [4 pt] Dire quanti sono i campi strettamente compresi tra $\mathbb{Q}$ e F.
- [4 pt] Dire quanti e quali di tali campi sono completamente contenuti in $\mathbb{R}$.

Nella risoluzione di ciascun punto potete dare per buoni i punti precedenti.

Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma – "La Sapienza"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it