ALGEBRA 2 — Secondo esame scritto

20 luglio 2012

(1) Se $H < G$, allora $C(H) = \{g \in G \mid gh = hg$ per ogni $h \in H\}$ è il *centralizzatore* di H.
- [3pt] Mostrare che $C(H)$ è un sottogruppo di G.
- [4pt] Mostrare che se $H \triangleleft G$, allora $C(H) \triangleleft G$.

(2) Si consideri la permutazione $\sigma = (1\,5\,2\,9\,7)$ nel gruppo simmetrico A_9.
- [2pt] Calcolare il numero dei coniugati di σ in A_9.
- [2pt] Calcolare l'ordine del normalizzatore N in A_9 del sottogruppo $H = (\sigma)$.
- [2pt] Mostrare che N contiene almeno un sottogruppo di ordine 20.
- [2pt] Mostrare che N contiene almeno un sottogruppo abeliano di ordine 20.

(3)
- [3 pt] Calcolare il polinomio minimo di $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}$ su $\mathbb{Q}$.
- [2 pt] L'estensione $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\gamma)$ è normale?
- [3 pt] Determinare il grado su $\mathbb{Q}$ del più piccolo campo $\mathbb{Q} \subset E \subset \mathbb{C}$ che sia un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$ e che contenga γ.

(4) Il campo $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$ è un'estensione finita di $\mathbb{F}_5$, e α soddisfa $\alpha^4 = 2\alpha + 1$.
- [4 pt] Mostrare che $[K : \mathbb{F}_5] = 4$.
- [2 pt] Quante sono le soluzioni in K dell'equazione $x^2 + x + 2 = 0$?
- [2 pt] Elencare tutti i campi strettamente contenuti tra $\mathbb{F}_5$ e K.

Nella risoluzione di ciascun punto potete dare per buoni i punti precedenti.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it