ALGEBRA 2 — Primo esame scritto
22 Giugno 2012

(1) [8+8 pt]
- Mostrare che il gruppo diedrale dell'esagono D_6 è isomorfo a $\mathrm{D}_3 \times \mathrm{C}_2$.
- Mostrare che il gruppo diedrale dell'ottagono D_8 non è isomorfo a $\mathrm{D}_4 \times \mathrm{C}_2$.

(2) [2+3+3+3+3+2 pt]
G è un gruppo di ordine $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ e R è un suo 3-Sylow non normale.

- Mostrare che il normalizzatore $N(R)$ contiene 45 elementi.
- Mostrare che $N(R)$ è abeliano.
- Mostrare che il 5-Sylow di G è normale. *[Sugg.: Quanti elementi lo normalizzano, almeno?]*
- Mostrare che G contiene un sottogruppo ciclico di ordine 35.
- Mostrare che anche il 7-Sylow di G è normale.
- A quali gruppi può essere isomorfo G? Individuarli tutti a meno di isomorfismo.

(3) [5+5+5+2 pt]
Se $g(x) = x^6 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$, sia α una radice complessa di $g(x)$, e poniamo $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

- Mostrare che L contiene la radice sesta dell'unità $\zeta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$.
- Mostrare che L è il campo di spezzamento di $g(x)$. Qual è il grado di L come estensione di $\mathbb{Q}$?
- Dire quante e quali sono le estensioni intermedie $\mathbb{Q} \subset E \subset L$ tali che $[E : \mathbb{Q}] = 2$.
- Determinare $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ a meno di isomorfismo.

(4) [4+4+4+5 pt]
In questo esercizio sfruttiamo la teoria di Galois per fattorizzare il polinomio $f(x) = x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \in \mathbb{F}_{11}[x]$.

- Mostrare che il gruppo moltiplicativo $\mathbb{F}_{11^n}^\times$ contiene elementi di ordine 7 se e solo se n è multiplo di 3.
- Mostrare che se $\mathbb{F}_{11^n}^\times$ contiene elementi di ordine 7, allora $f(x)$ si spezza in $\mathbb{F}_{11}[x]$ in fattori lineari. Calcolare il grado su $\mathbb{F}_{11}$ del campo di spezzamento L di $f(x)$.
- Sia $1 \neq \omega \in L$, $\omega^7 = 1$. Quali sono le altre radici in L del polinomio minimo $g(x) \in \mathbb{F}_{11}[x]$ di ω? *[Sugg.: cosa succede applicando il Frobenius?]*
- Mostrare che $g(x)$ è della forma $x^3 + ax^2 + (a-1)x - 1, a \in \mathbb{F}_{11}$, e fattorizzare $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ nel prodotto di irriducibili di $\mathbb{F}_{11}[x]$, utilizzando l'informazione che i suoi fattori irriducibili hanno questa forma.

Se è utile, nella risoluzione di ciascun punto si possono utilizzare i punti precedenti, anche se non risolti.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA – "LA SAPIENZA"
E-mail address: dandrea@mat.uniroma1.it