

## ALGEBRA 2 - Secondo esonero

12 giugno 2012

1. Sia  $\alpha$  una radice reale dell'equazione  $x^4 - 7x = 10$ .
  - [4pt] Calcolare il polinomio minimo di  $\alpha^2$  su  $\mathbb{Q}$ .
  - [4pt] Calcolare  $[\mathbb{Q}(\alpha^2) : \mathbb{Q}]$  e  $[\mathbb{Q}(\alpha^3) : \mathbb{Q}]$ .
  - [4pt] E' vero che  $(\alpha + 1)^{-1}$  appartiene a  $\mathbb{Q}[\alpha]$ ? Se sì, calcolarlo; se no, dimostrare che  $\alpha + 1$  non è invertibile in  $\mathbb{Q}[\alpha]$ .
  
2. Siano  $\pm\alpha, \pm\beta \in \mathbb{C}$  le quattro radici distinte di  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ .
  - [2pt] Calcolare  $\alpha\beta$ .
  - [4pt] Calcolare  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$  e  $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\alpha)]$ .
  - [3pt] Se  $L$  è il campo di spezzamento di  $f(x)$ , quanto vale  $[L : \mathbb{Q}]$ ?
  - [3pt] Determinare, utilizzando la corrispondenza di Galois, tutte le estensioni intermedie  $\mathbb{Q} \subset E \subset L$  tali che  $[E : \mathbb{Q}] = 2$ .
  
3. Sia  $g(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ .
  - [2pt] Fattorizzare  $g(x)$  nel prodotto di polinomi irriducibili<sup>1</sup> di  $\mathbb{F}_2[x]$ .
  - [3pt] Qual è il grado su  $\mathbb{F}_2$  del campo di spezzamento di  $g(x)$ ?
  - [3pt] Se  $F : L \rightarrow L$  è l'automorfismo di Frobenius  $x \mapsto x^2$ , determinare quanti sono gli elementi di  $L$  che sono fissati da  $F^2$ .
  - [3pt] Se  $1 \neq \gamma \in L$  soddisfa  $\gamma^5 = 1$ , descrivere gli elementi di  $L$  fissati da  $F^2$  per mezzo di espressioni polinomiali in  $\gamma$ .

---

<sup>1</sup>Gli elementi irriducibili di  $\mathbb{F}_2[x]$  di grado fino a 3 dovreste conoscerli tutti.