

ALGEBRA 2 - Secondo esonero

12 giugno 2012

1. Sia α una radice reale dell'equazione $x^4 - 7x = 10$.
 - [4pt] Calcolare il polinomio minimo di α^2 su \mathbb{Q} .
 - [4pt] Calcolare $[\mathbb{Q}(\alpha^2) : \mathbb{Q}]$ e $[\mathbb{Q}(\alpha^3) : \mathbb{Q}]$.
 - [4pt] E' vero che $(\alpha + 1)^{-1}$ appartiene a $\mathbb{Q}[\alpha]$? Se sì, calcolarlo; se no, dimostrare che $\alpha + 1$ non è invertibile in $\mathbb{Q}[\alpha]$.

2. Siano $\pm\alpha, \pm\beta \in \mathbb{C}$ le quattro radici distinte di $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
 - [2pt] Calcolare $\alpha\beta$.
 - [4pt] Calcolare $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ e $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}(\alpha)]$.
 - [3pt] Se L è il campo di spezzamento di $f(x)$, quanto vale $[L : \mathbb{Q}]$?
 - [3pt] Determinare, utilizzando la corrispondenza di Galois, tutte le estensioni intermedie $\mathbb{Q} \subset E \subset L$ tali che $[E : \mathbb{Q}] = 2$.

3. Sia $g(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.
 - [2pt] Fattorizzare $g(x)$ nel prodotto di polinomi irriducibili¹ di $\mathbb{F}_2[x]$.
 - [3pt] Qual è il grado su \mathbb{F}_2 del campo di spezzamento di $g(x)$?
 - [3pt] Se $F : L \rightarrow L$ è l'automorfismo di Frobenius $x \mapsto x^2$, determinare quanti sono gli elementi di L che sono fissati da F^2 .
 - [3pt] Se $1 \neq \gamma \in L$ soddisfa $\gamma^5 = 1$, descrivere gli elementi di L fissati da F^2 per mezzo di espressioni polinomiali in γ .

¹Gli elementi irriducibili di $\mathbb{F}_2[x]$ di grado fino a 3 dovreste conoscerli tutti.