

ALGEBRA 2 - Primo esonero

27 aprile 2012

1. Sia $G = D_6 \times Q_4$ il prodotto diretto del gruppo diedrale dell'esagono col gruppo delle unità dei quaternioni.
 - Quante sono le soluzioni di $g^4 = \text{id}$ in G ?
 - Determinare quanti elementi di ordine 2, 3, 4 ci siano in G .
 - Qual è il massimo ordine di un elemento di G ? Quanti sono gli elementi di tale ordine?

2.
 - Quanti elementi possiede il centralizzatore $Z(\tau)$ di $\tau = (1\ 3\ 8)(2\ 9\ 5\ 4)$ in S_9 ?
 - Determinare se $Z(\tau)$ sia ciclico.

3.
 - Quanti sono i coniugati di $\sigma = (1\ 6)(2\ 4)(3\ 9)(5\ 7)$ nel gruppo alterno A_9 ?
 - Mostrare che esiste un 2-Sylow di A_9 i cui elementi commutano tutti con σ .
 - Esibire un elemento di ordine 6 in A_9 che commuta con σ . *[Attenzione! Tutti gli elementi di A_9 sono permutazioni pari.]*

4. Sia G un gruppo di ordine 105, P un suo 7-Sylow, Q un suo 5-Sylow.
 - Mostrare che uno tra P e Q è normale in G .
 - Mostrare che PQ è un sottogruppo di G , e che è ciclico.
 - Mostrare che P e Q sono entrambi normali in G . *[Sugg.: se non lo sono, quanti elementi li normalizzano?]*
 - (Facoltativo) Sapendo che G non è abeliano, individuare G a meno di isomorfismo.

Nella risoluzione di ciascun punto potete dare per buoni i punti precedenti.