ALGEBRA 2 - Primo esonero

27 aprile 2012

soluzioni

1. Sia $G = \mathrm{D}_6 \times \mathrm{Q}_4$ il prodotto diretto del gruppo diedrale dell'esagono col gruppo delle unità dei quaternioni.
   - Quante sono le soluzioni di $g^4 = \mathrm{id}$ in G?
   - Determinare quanti elementi di ordine $2, 3, 4$ ci siano in G.
   - Qual è il massimo ordine di un elemento di G? Quanti sono gli elementi di tale ordine?

Soluzione:

- Il gruppo Q_4 contiene 6 elementi $(\pm i, \pm j, \pm k)$ di ordine 4, uno (-1) di ordine 2 e l'identità, che ha ordine 1.

  Il gruppo D_6 contiene 7 elementi di ordine 2 (le 6 simmetrie e la rotazione ρ^3 di 180 gradi), due $(\rho^{\pm 1})$ di ordine 6, due $(\rho^{\pm 2})$ di ordine 3 e l'identità, che ha ordine 1.

  Affinché la quarta potenza di $g = (x, y) \in \mathrm{D}_6 \times \mathrm{Q}_4$ sia uguale all'identità, deve valere $x^4 = \mathrm{id}, y^4 = \mathrm{id}$, e quindi x, y devono avere ordine $1, 2$ oppure 4. Questo ci fornisce 8 scelte in D_6 e 8 scelte in Q_4. L'equazione ha quindi $8 \cdot 8 = 64$ soluzioni.
- Le soluzioni all'equazione $g^2 = \mathrm{id}$ si calcolano come sopra, e sono $8 \cdot 2 = 16$. Allo stesso modo, le soluzioni all'equazione $g^3 = \mathrm{id}$ sono $3 \cdot 1 = 3$.

  Un elemento $g \in G$ ha ordine 3 se e solo se soddisfa $g^3 = \mathrm{id}$ e non è l'identità. Quindi G possiede $3 - 1 = 2$ elementi di ordine 3. Allo stesso modo possiede $16 - 1 = 15$ elementi di ordine 2.

  Gli elementi di ordine 4 sono invece le soluzioni di $g^4 = \mathrm{id}$ che non soddisfano $g^2 = \mathrm{id}$, e sono quindi $64 - 16 = 48$.
- L'ordine di $g = (x, y)$ è il minimo comune multiplo degli ordini di $x \in \mathrm{D}_6$ e $y \in \mathrm{Q}_4$. Il massimo tra i numeri che si ottengono in questo modo è 12 che si ottiene quando l'ordine di y è 4, e quello di x è 3 oppure 6.

  Gli elementi di ordine 4 in Q_4 sono 6, mentre gli elementi di ordine 3 oppure 6 in D_6 sono 4. In conclusione, gli elementi di ordine 12 in G sono $4 \cdot 6 = 24$.

2. - Quanti elementi possiede il centralizzatore $Z(\tau)$ di $\tau = (1\,3\,8)(2\,9\,5\,4)$ in S_9?
   - Determinare se $Z(\tau)$ sia ciclico.

Soluzione:

- Il numero di coniugati di τ coincide con l'indice del centralizzatore $Z(\tau)$, ed è più semplice da calcolare.

  In effetti, i coniugati di τ in S_9 sono gli elementi che hanno la sua stessa struttura ciclica, e sono pertanto prodotto di un 3-ciclo e un 4-ciclo disgiunti. Il loro numero è allora

$$\binom{9}{3}2! \cdot \binom{6}{4}3! = \binom{9}{3}\binom{6}{2}3!2! = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 3! \cdot 2! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5.$$

  L'indice di $Z(\tau)$ in S_9 è allora $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ e quindi l'ordine di $Z(\tau)$ è

$$\frac{9!}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = 4! = 24.$$

- Possiamo procedere in due modi. Il più immediato è notare che S_9 non possiede elementi di ordine 24, e quindi $Z(\tau)$ non può essere ciclico.

  Volendo essere pignoli, bisogna dare una dimostrazione di questo fatto. Ricordate che l'ordine di una permutazione è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei suoi cicli disgiunti. In effetti, se $24 = 2^3 \cdot 3$ è il minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli di una permutazione $\sigma \in S_9$, almeno una di esse è multipla di 8: dovendo essere ≤ 9 deve essere esattamente 8. Ma allora σ è un 8-ciclo, che ha ordine 8, e non 24.

  Si può tuttavia anche ricavare la struttura di $Z(\tau)$ esplicitamente. Questo sottogruppo contiene sicuramente le 12 potenze di τ — che ha appunto ordine 12 — ma anche la trasposizione (67) che è disgiunta dai cicli di τ, e quindi commuta con τ.

  In conclusione, $Z(\tau)$ è prodotto diretto dei suoi sottogruppi $H = (\tau)$ e $K = ((67))$, e quindi $Z(\tau) \simeq C_{12} \times C_2$, che non è ciclico, ma è comunque abeliano.

3. - Quanti sono i coniugati di $\sigma = (1\,6)(2\,4)(3\,9)(5\,7)$ nel gruppo alterno A_9?
   - Mostrare che esiste un 2-Sylow di A_9 i cui elementi commutano tutti con σ.
   - Esibire un elemento di ordine 6 in A_9 che commuta con σ. *[Attenzione! Tutti gli elementi di A_9 sono permutazioni pari.]*

Soluzione:

- Abbiamo visto a lezione che il numero dei coniugati di una permutazione σ in un gruppo alterno A_n è uguale al numero dei suoi coniugati in S_n se σ commuta con almeno una permutazione dispari; e si riduce invece alla metà di tale numero se σ commuta in S_n solo con permutazioni pari. Si vede ad occhio che la nostra σ commuta con $(1\,6)$ e quindi i suoi coniugati in S_9 sono coniugati anche in A_9.

  Procediamo come abbiamo fatto tante volte a lezione: i coniugati di σ sono tutte e sole le permutazioni che si esprimono come prodotto di 4 trasposizioni disgiunte. Il loro numero è:
  $$\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}/4!$$
  Dividere per $4!$ è necessario perché trasposizioni disgiunte commutano, e scambiarne la posizione non altera quindi la permutazione che si ottiene moltiplicandole. Semplificando, si ottiene:
  $$\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}/4! = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2^4\cdot4!} = 9\cdot7\cdot5\cdot3 = 945.$$

- L'indice del centralizzatore $Z_{\mathrm{A}_9}(\sigma)$ di σ in A_9 è uguale a $9\cdot7\cdot5\cdot3$. Pertanto il suo ordine è
  $$\frac{9!/2}{9\cdot7\cdot5\cdot3} = 8\cdot6\cdot4 = 2^6\cdot3.$$
  L'esercizio ci chiede di mostrare che $Z_{\mathrm{A}_9}(\sigma)$ contiene un 2-Sylow di A_9. In effetti, per il Teorema di Sylow, $Z_{\mathrm{A}_9}(\sigma)$ contiene un sottogruppo di 2^6 elementi. Ad ogni modo, l'ordine di A_9 è
  $$\frac{9!}{2} = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = 2^6\cdot3^4\cdot7\cdot5,$$
  e quindi un sottogruppo di ordine 2^6 è un 2-Sylow anche di A_9.

- Un 6-ciclo $\rho = (a_1a_2a_3a_4a_5a_6)$ commuta con tutte le sue potenze. In particolare, anche con $\rho^3 = (a_1a_4)(a_2a_5)(a_3a_6)$. Di conseguenza, $(1\,2\,3\,6\,4\,9)$ commuta con $(1\,6)(2\,4)(3\,9)$. Poiché permutazioni disgiunte commutano tra loro, $(1\,2\,3\,6\,4\,9)(5\,7)$ commuta con $\sigma = (1\,6)(2\,4)(3\,9)(5\,7)$.

4. Sia G un gruppo di ordine 105, P un suo 7-Sylow, Q un suo 5-Sylow.

- Mostrare che uno tra P e Q è normale in G.
- Mostrare che PQ è un sottogruppo di G, e che è ciclico.
- Mostrare che P e Q sono entrambi normali in G. *[Sugg.: se non lo sono, quanti elementi li normalizzano?]*
- (Facoltativo) Sapendo che G non è abeliano, individuare G a meno di isomorfismo.

Soluzione:

- Il primo punto lo abbiamo fatto esplicitamente a lezione per i gruppi di ordine pqr, dove p, q, r sono primi distinti, e bastava ripetere il ragionamento per $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

  A lezione, avevamo proceduto così: il numero dei 7-Sylow divide 15 ed è $\equiv 1 \mod 7$. Se c'è un solo 7-Sylow, allora è normale. Altrimenti devono essere 15, e G possiede $15 \cdot (7 - 1) = 90$ elementi di ordine 7.

  Allo stesso modo, il numero dei 5-Sylow divide 21 ed è $\equiv 1 \mod 5$. Se G possiede un solo 5-Sylow, questo deve essere normale. Altrimenti ne possiede 21, ed ha quindi $21 \cdot (5 - 1) = 84$ elementi di ordine 5. Ad ogni modo, non c'è spazio in G, che ha ordine 105, per 90 elementi di ordine 7 e 84 di ordine 5, e quindi G ha il 5- o il 7-Sylow normale.

- Il prodotto di due sottogruppi non è necessariamente un sottogruppo. Ma se uno dei due sottogruppi è normale, lo è sempre. Stiamo moltiplicando i sottogruppi P e Q, almeno uno dei quali è normale. Il prodotto PQ è quindi un sottogruppo di G di ordine $35 = 5 \cdot 7$. Poiché 5 non divide 7, tale sottogruppo è necessariamente ciclico.

- Il sottogruppo $N = PQ$ è ciclico, e quindi abeliano. Normalizza quindi sia P che Q. In altre parole, il normalizzatore di P e Q in G deve contenere almeno i 35 elementi che appartengono ad N.

  Abbiamo visto che se P non è normale in G, allora i 7-Sylow di G sono complessivamente 15. Questo vuol dire che il normalizzatore di P in G possiede $105/15 = 7$ elementi. Per quanto detto prima, tale normalizzatore contiene almeno 35 elementi, ed otteniamo un assurdo. L'unica alternativa è che P sia normale. Lo stesso discorso si ripete, identico, per il sottogruppo Q, mostrando la sua normalità.

- L'aggettivo *facoltativo* va interpretato come un invito a non risolvere l'ultima parte. In ogni caso, P e Q sono entrambi normali, e quindi anche il loro prodotto $N = PQ = P \times Q$ lo è. Se H è un 3-Sylow di G, è immediato mostrare come G sia prodotto semidiretto di N con H, dal momento che $|N|$ e $|H|$ sono primi tra loro, e il loro prodotto è uguale a $|G|$.

  Per determinare G a meno di isomorfismo, vanno determinati tutti i prodotti semidiretti (non abeliani) della forma $N \rtimes_\phi H$, e quindi vanno calcolati tutti gli omomorfismi

  $$\phi : H \simeq \mathrm{C}_3 \to \mathrm{C}_6 \times \mathrm{C}_4 \simeq \mathbb{Z}/(7)^\times \times \mathbb{Z}/(5)^\times \simeq \mathbb{Z}/(35)^\times \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{C}_{35}) \simeq \mathrm{Aut}(P \times Q).$$

  Poiché 3 è primo con $4 = 5-1$, l'immagine di ϕ è tutta contenuta in $\mathrm{C}_6 \times \{\mathrm{id}\}$. Pertanto H coniuga gli elementi di Q banalmente, e G è isomorfo a $Q \times (P \rtimes H)$. Il secondo fattore è un gruppo di ordine 21, e non può essere abeliano, altrimenti G è anch'esso abeliano. Allora è l'unico (a meno di isomorfismo) gruppo non abeliano di ordine 21, che abbiamo costruito in classe. In conclusione, G si ottiene come prodotto diretto di C_5 con il gruppo non abeliano di ordine 21.