Calcolo I, a.a. 2015–2016 — Esercizi 10 — 18 dicembre 2015

☺ **1)** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Calcolare le derivate

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)\,dt\,, \qquad \frac{d}{dx}\int_x^{b} f(t)\,dt\,, \qquad \frac{d}{dx}\int_x^{2x} f(t)\,dt\,.$$

Inoltre (usando il Teorema di de l'Hôpital) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt\,.$$

☺ **2)** Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,dx\,, \qquad \int\ln^2(x)\,dx\,, \qquad \int\operatorname{sen}(\ln(x))\,dx\,, \qquad \int\operatorname{arc\,tg}(x)\,dx\,, \qquad \int\frac{x^3}{x^8+1}\,dx\,.$$

Calcolare gli integrali definiti (l'ultimo con la sostituzione $y^2 = \mathrm{e}^z - 1$):

$$\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[n]{x}}\,, \qquad \int_0^5\frac{t}{\mathrm{e}^t}\,dt\,, \qquad \int_1^4\frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy\,, \qquad \int_1^2\frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad \int_0^{\ln(2)}\sqrt{\mathrm{e}^z-1}\,dz \quad (\text{sost. } y^2=\mathrm{e}^z-1)\,.$$

☹ **4)** Sia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua e convessa. Dimostrare che la funzione $F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita come

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

è continua e convessa. [Suggerimento: porre $t = x\cdot s$].

☹☹ **5)** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x) \geq 0$ per tutti gli x. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{[a,b]} f(t)\,.$$

☺ **6)** Calcolare in due modi

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}\,.$$

Suggerimenti: a) sostituire $x = \operatorname{tg}(t)$; b) scrivere $\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x\cdot x}{(1+x^2)^2}$. Successivamente, calcolare una primitiva di $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ in termini di una primitiva di $\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$ (e di altre funzioni).

☺ **7)** Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\operatorname{arc\,sen}(x)\,dx\,, \qquad \int_0^3\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx\,, \qquad \int_2^4\frac{3\sqrt{x}-2}{x^2(1-\sqrt{x})^2}\,dx\,.$$

☺ **8** Determinare una primitiva **continua** su $[0,\pi]$ della funzione $\frac{4}{5+3\cos(2x)}$ (attenzione a quello che accade in $\pi/2$!).

☹ **9** Usando l'esercizio 5 del compito 9, dimostrare che

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\,.$$

☹☹ **10** Data la funzione

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\,,$$

determinarne insieme di definizione, continuità e derivabilità, insiemi di crescenza e decrescenza e di concavità e convessità. Dimostrare poi: a) che F ammette limite per x tendente a $+\infty$ e b) che tale limite è finito (NB: il limite non si calcola...).