Calcolo I, a.a. 2015–2016 — Esercizi 9 — 11 dicembre 2015

☺ **1)** Sia $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile.
(i) Supponiamo che f sia *pari*. Dimostrare che $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
(ii) Supponiamo che f sia *dispari*. Quanto vale $\int_{-a}^{a} f(x)dx$?
(iii) Usando il punto precedente, calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,dx$ per n, m in $\mathbb{Z}$ con $n \neq m$. Quanto vale invece $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,dx$?

☺ **2)** Calcolare la media integrale di $f(x) = a + b\cos(x)$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$; quindi trovare un punto $\xi \in [-\pi, \pi]$ tale che $f(\xi)$ è uguale alla media integrale di f. Risolvere lo stesso problema per la funzione $g(x) = x^2$ sull'intervallo $[0, 2]$ e per la funzione $h(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ sull'intervallo $[0, \pi]$.

☹☹ **3)** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione convessa (e integrabile). Dimostrare la disuguaglianza

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

[Suggerimento: disegnare una figura].

☹ **4)** Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^b (f(x) + \alpha g(x))^2 dx \geq 0\,,$$

e dedurne la disuguaglianza (detta, tanto per cambiare, di Cauchy, o anche di Buniakowski o di Schwartz)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right).$$

[Suggerimento: sviluppare il quadrato nella disuguaglianza precedente e osservare che il discriminante in α...]

☺ **5)** Sia per $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(x)\,dx\,.$$

(i) Dimostrare che $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,dx$. Quindi calcolare I_0, I_1, I_2.
(ii) Dimostrare che $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
(iii) Calcolare I_n per ogni n.

☺ **6)** Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x - \sqrt{x} - 2)}\,,$$

☺ **7)** Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}(x)}\,, \qquad \int \frac{x\,dx}{1 + \cos(x)}\,.$$

☺ **8)** Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_1^p \frac{dx}{[x]^2}\,, \qquad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + (x - [x])^2}\,, \qquad p \geq 1\,,\ [x] = \text{ parte intera di } x\,.$$

☹ **9)** Sia

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + |t|^3}\,.$$

Senza calcolare esplicitamente f, determinare nell'ordine: insieme di definizione, parità e disparità, segno, continuità e derivabilità, crescenza e decrescenza, concavità e convessità. Infine, calcolare il limite di f per x tendente ad infinito.

☹☹ **10)** Dimostrare (non per induzione…) che

$$n! \geq n^n \, \mathrm{e}^{-n+1} \, .$$

Suggerimenti: il logaritmo di $n!$ è la somma di $\ln(k)$ al variare di k tra… Il logaritmo di k è maggiore dell'integrale tra $k-1$ e k di …