Calcolo I, a.a. 2015–2016 — Esercizi 8 — 4 dicembre 2015

☺ – **1)** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile con derivata continua, e sia $f(0)=0$. Allora esiste una funzione continua $g(x)$ tale che $f(x)=x\cdot g(x)$. Suggerimento: dimostrare che esiste c tale che è continua la funzione

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{per } x\neq 0,\\ c & \text{per } x=0.\end{cases}$$

☺ – **2)** Calcolare il polinomio di Taylor del terzo ordine per $f(x)=\mathrm{sen}(\mathrm{e}^x-1)$ in $x=0$, per $g(x)=\ln(x)$ in $x=2$, per $h(x)=\mathrm{sen}(x)$ e $k(x)=\cos(x)$ in $x=\pi/2$. Si può calcolare il polinomio di Taylor del terzo ordine in 0 per la funzione

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sen} x}{x} & \text{per } x\neq 0,\\ 1 & \text{per } x=0?\end{cases}$$

☹ – **3)** Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile, e sia $x_0\in(a,b)$ un punto critico, ossia $f'(x_0)=0$. Dimostrare che se $f''(x_0)>0$ allora x_0 è un punto di minimo relativo, mentre se $f''(x_0)<0$ allora x_0 è un punto di massimo relativo. Suggerimento: si usi la formula di Taylor al secondo ordine. Sapreste generalizzare questo risultato?

☺ – **4)** Usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange,
(i) calcolare le prime 7 cifre decimali di $\ln(1.01)$ (esatte!!);
(ii) dimostrare che, per ogni $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\,.$$

☹☹ – **5)** Sia data la successione r_n definita da

$$r_n=\mathrm{e}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}-\ldots-\frac{1}{n!}=\mathrm{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,.$$

(☺ i) Dimostrare che, per ogni $n=0,1,2,\ldots$,

$$0<r_n<\frac{3}{(n+1)!}\,.$$

(☹☹ ii) Dimostrare (per assurdo) che e è irrazionale.

☺ – **6)** Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{sen}(x)}{x\,\mathrm{sen}^2(x)}\,,\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x\,\cos(\sqrt{x})}{x^3}\,.$$

☺ – **7)** Determinare A e B in modo tale che

$$\lim_{x\to 0}\frac{A\,(\mathrm{e}^x-1)+B\,\ln(1+x)-(x^3+5x^2-x)}{x^3}=L\,,$$

con L numero reale.

☹ – **8)** Dimostrare (usando gli esercizi 4(ii) e 5(i)) che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\max_{x\in[0,1]}\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\right)=0\,.$$

☺ – **9)** Dimostrare che

$$\mathrm{e}=\min\{A>1:A^x\geq 1+x\ \ \forall x\in\mathbb{R}\}\,.$$

☹☹ **10** Dimostrare che

$$\frac{\pi}{6}=\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k+1}\,.$$