Calcolo I, a.a. 2015–2016 — Esercizi 7 — 27 novembre 2015

☹ – **1)** Consideriamo le tre funzioni f, g, $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{per } x = 0; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{per } x = 0; \end{cases} \qquad k(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Dimostrare che:
(a) f, g, k sono continue e derivabili per $x \neq 0$;
(b) f e g non sono derivabili per $x = 0$ mentre k lo è e si ha $k'(0) = 0$;
(c) il limite $\lim_{x\to 0} k'(x)$ non esiste.

☹ – **2)** Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua, e sia $c \in (a, b)$. Supponiamo di sapere che f è derivabile in tutti i punti $x \neq c$, e che esiste finito il limite $\lim_{x\to c} f'(x) = L$. Allora f è derivabile anche in c e si ha $f'(c) = L$.

☺ – **3)** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari derivabile n volte. Determinare se le sue derivate $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$ sono pari o dispari (o nessuna delle due cose). E se f è dispari?

☺ – **4)** Date le funzioni

$$f(x) = x^2 + 2\cos x, \quad g(x) = 6\mathrm{e}^x - x^3, \quad h(x) = \begin{cases} x^3 & \text{per } x \geq 0, \\ x^2 & \text{per } x \leq 0, \end{cases} \quad p(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{per } x \geq 0, \\ 1 + x + ax^2 & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

dimostrare che f, g, h sono convesse su tutto $\mathbb{R}$, e determinare per quali valori del parametro a la funzione $p(x)$ è convessa su $\mathbb{R}$. Infine dimostrare che la funzione $f(x) = x^{11} + x^6$ *non* è convessa su $\mathbb{R}$.

☹ – **5)** (i) Siano f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue e convesse. Allora $f + g$ è continua e convessa. Che si può dire di $f \cdot g$? E di αf per $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato? Giustificare le risposte con dimostrazioni o controesempi.
(ii) Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, convessa e limitata. Allora esiste finito il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Provare a risolvere questo esercizio in due modi: prima supponendo che esista la derivata seconda f'', e poi senza usare le derivate ma solo la definizione di convessità.

☺ – **6)** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, derivabile, convessa e limitata. Dimostrare che f è costante. Suggerimento: si usi l'esercizio precedente e l'esercizio 4(a) del 19 novembre.

☺ – **7)** Si studi la funzione $f(x) = x^2 - \operatorname{sen}^2(x)$, determinando insiemi di definizione, continuità e derivabilità, limiti ed asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi assoluti e relativi, intervalli di concavità e convessità.

☺ – **8)** Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{1 - 2\operatorname{sen}(x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}(x^2)}{x^6}.$$

☺ – **9)** Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(x)\right]^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\,(x - \ln(1+x))}{\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right)\ln(1+x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^x - 1 - \operatorname{sen}(x)}.$$

☹☹ – **10)** Sia $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile; supponiamo che $y(0) = 0$ e che esistano a e b in $\mathbb{R}$ tali che $y'(x) = a\,y(x) + b$ per ogni x in $\mathbb{R}$. Determinare a e b affinché si abbia

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{y^2(x)} - 1}{x^2} = 1.$$

Esistono a e b tali che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{y(x)} - 1}{x^2} = 1\,?$$