Calcolo I, a.a. 2015–2016 — Esercizi 6 — 20 novembre 2015

☺ – **1)** Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme di definizione, l'insieme di continuità, l'insieme di derivabilità, calcolare la derivata, determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza e trovare massimi e minimi relativi e assoluti:

$$\frac{x}{2+x}\,, \quad \frac{x(x+1)}{2x-3}, \quad \operatorname{arc\,tg}(1-x^2)\,, \quad |2-3x|\,, \quad |x-1|+|3-4x|\,, \quad x\,\mathrm{e}^{|x-1|}\,, \quad 2x-\ln(2x^2-1)\,.$$

☺ – **2)** Determinare per quali valori dei parametri α, β le seguenti funzioni sono continue e per quali valori sono derivabili.

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x}-1 & \text{per } x>0\,, \\ \alpha+\beta x & \text{per } x\le 0\,, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \alpha x-\beta x^2 & \text{per } x>0\,, \\ \alpha & \text{per } x=0\,, \\ 1-\cos x & \text{per } x<0\,, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \beta x & \text{per } x>0\,, \\ \alpha & \text{per } x=0\,, \\ x\,\mathrm{e}^{1/x} & \text{per } x<0\,. \end{cases}$$

☹ – **3)** Consideriamo le tre funzioni f, g e h definite per $x \neq 0$ come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x^{1-x} & \text{per } x>0\,, \\ \alpha x & \text{per } x<0\,; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(x\ln x) & \text{per } x>0\,, \\ \mathrm{e}^{x}-\alpha & \text{per } x<0\,; \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} (2-x)\mathrm{e}^{x-|1-x|} & \text{per } x>0\,, \\ \alpha(2+3x) & \text{per } x<0\,. \end{cases}$$

Per ciascuna funzione determinare il valore di α per cui la funzione si può estendere a una funzione continua in 0; quindi assegnato tale valore di α proseguire studiando insieme di definizione, continuità, derivabilità, derivata, intervalli di crescenza e decrescenza, massimi e minimi relativi e assoluti, asintoti.

☹☹☹ – **4)** Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e derivabile.
(a) Supponiamo che f ed f' tendano a due limiti finiti per $x \to +\infty$: $f \to L$ e $f' \to M$ (in particolare, f ha un asintoto orizzontale). Dimostrare che $M = 0$.
(b) Supponiamo che la derivata f' tenda ad un limite finito per $x \to +\infty$: $f' \to M$. Dimostrare che $\frac{f(x)}{x} \to M$ per $x \to +\infty$.

☹ – **5)** Dimostrare che per tutti gli $x \ge 0$ valgono le disuguaglianze

$$\mathrm{e}^x \ge 1+x\,, \qquad \ln(1+x) \ge x-\frac{x^2}{2}\,, \qquad \mathrm{e}^x \ge 1+x+\frac{x^2}{2}\,.$$

Che si può dire della prima disuguaglianza per $x<0$? Siete in grado di dimostrare che la terza non è vera per ogni $x<0$ senza calcolare nessuna derivata?

☹ – **6)** Si dimostri la disuguaglianza

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha} \ge (x^\beta+y^\beta)^{1/\beta} \quad \forall x\,,y\ge 0\,,\ 0<\alpha<\beta\,.$$

Suggerimento: se $y=0$ non c'è nulla da dimostrare; se $y \neq 0$ possiamo dividere per y, definire $t = \frac{x}{y}$ e...

☺ – **7)** Si calcoli la derivata n-sima della funzione $f(x) = x^{n-1}\ln(x)$.

☺ – **8)** Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n-x^n}{n+x^n}\,.$$

☹ – **9)** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$, derivabile in $[a,b]$, e con derivata prima $f'(x)$ derivabile in (a,b). Supponiamo inoltre che esista c in (a,b) tale che $f(a) = f(c) = f(b)$. Dimostrare che esiste d in (a,b) tale che $f''(d) = 0$.

☹☹ – **10)** Se x è razionale positivo, siano $n(x)$ e $p(x)$ i due interi privi di divisori in comune tali che $x = \frac{n(x)}{p(x)}$. Ad esempio, se $x = \frac{1}{2}$, $n(x) = 1$ e $p(x) = 2$; se $x = \frac{4}{6}$ allora $n(x) = 2$ e $p(x) = 3$. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n(x)+p(x)} & \text{se } x \in \mathbf{Q}^+, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{Q}^+. \end{cases}$$

Determinare l'insieme di continuità di $f(x)$.