Calcolo I, a.a. 2015–2016 — Esercizi 5 — 6 novembre 2015

☺☹ – **1)** Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 2^x}{(1+\sqrt{x})(3^x - x)}\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5 - 7x}{2x^2 - 6x^5}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+x}}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x+1}.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{2-x}\,, \qquad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{tg}(x)}{\sqrt{x}}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(\ln(1+x))}{x}\,.$$

☹ – **2)** Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$\lim_{x\to 0^\pm} \left[\frac{1}{x}\right], \qquad \lim_{x\to+\infty} [x]\,, \qquad \lim_{x\to 1^\pm} (x^2-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x)}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\ln^2(x)\,.$$

☹ – **3)** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dimostrare che se in un punto x vale la proprietà

$$\lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)| = 0\,,$$

allora vale anche la proprietà

$$\lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x-h)| = 0\,.$$

Mostrare con un esempio che non vale il viceversa in generale.

☺ – **4)** Siano

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-2x)}{1-\mathrm{e}^{-3x}} & \text{per } x < 0\,, \\ \alpha & \text{per } x = 0\,, \\ \beta(1+x) & \text{per } x > 0\,. \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\ln(1+\alpha^2 x)}{x} & \text{per } x > 0\,, \\ \alpha + \beta x^2 & \text{per } x \le 0\,. \end{cases}$$

Per quali valori dei parametri α e β sono continue la funzione f e g?

☺☹☹– **5)** Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *hölderiana* di esponente α se esistono un numero α con $0 < \alpha \le 1$ e una costante $C \ge 0$ tali che

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha\,, \qquad \forall x\,, y \in A\,. \tag{1}$$

- ☺ Dimostrare che una funzione hölderiana è continua.
- ☺ Dimostrare che $f(x) = \sqrt{x}$ è hölderiana di esponente $\frac{1}{2}$.
- ☹☹ Dimostrare che se una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ verifica la proprietà (1) con un esponente $\alpha > 1$ allora è costante.

☹ – **6)** Con quale altro nome è nota la funzione

$$f(x) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2(n!\,\pi\,x)}{\mathrm{sen}^2(n!\,\pi\,x) + t^2} \right)?$$

☺ – **7)** Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right), \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}} - \sqrt{x} \right),$$

dove, nel secondo caso, compaiono n radici quadrate (con $n \ge 2$ fissato).

☺ – **8)** Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos(x)}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{1-\cos(\sqrt{x})}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sen}(\sqrt{x+1})-\operatorname{sen}(\sqrt{x})\right)\,.$$

☹ – **9** Sia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f([-1,1])\subseteq[-1,1]$. Si dimostri che esiste almeno un x_0 in $[-1,1]$ tale che $f(x_0)=x_0$. Si dimostri poi che se f è lipschitziana con costante di lipschitzianità strettamente minore di 1, allora x_0 è anche unico.

☹ – **10** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Si dimostri — in due modi — che fissata una successione $\{x_n\}$ limitata, da $\{f(x_n)\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente.