Calcolo I, a.a. 2015–2016 — Esercizi 4 — 30 ottobre 2015

☺ – **1)** Sia a_n una successione tale che
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q\,,$$
dove $0 \leq q < 1$. Dimostrare che a_n converge a zero. Dare un esempio di successione con questa proprietà.

☺☹ – **2)** Si calcolino i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n^2-3}}{3n+1}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n\,.$$

☺☹ – **3)** Si calcolino i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n}}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4n^4+1}{n!}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\,n^2}{4^n-n}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)^n}{(2n)!}}\,.$$

☺☹ – **4)** Si calcolino i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n!}\right)^n\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+\sqrt{n}+3}{n}\right)^n\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n\sqrt{n}}{n+1}}\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^3}}\right)^n\,,$$

☺☹ – **5)** Si calcolino i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to+\infty} 3^n\left(2^{\frac{1}{n!}}-1\right)\,, \quad \lim_{n\to+\infty} n\,\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)\,, \quad \lim_{n\to+\infty} n\,\ln\left(n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)\right)\,.$$
Per l'ultimo limite, si usi il fatto che $\mathrm{e}^x-1-x=\frac{x^2}{2}+h(x)$, e h è una funzione tale che $\frac{h(a_n)}{a_n^2}$ converge a zero per ogni successione a_n tendente a zero.

☹☹ – **6)** Dimostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty\,.$$

☺ – **7)** Sia a_n una successione con la proprietà seguente: da ogni sottosuccessione di a_n si può estrarre una sotto-sottosuccessione convergente. Dimostrare che la successione a_n è limitata.

☺– **8)** Determinare se le seguenti serie sono convergenti, divergenti o non convergenti:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(2k)!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{k}\right).$$

☺☹ – **9)** Determinare se le seguenti serie sono convergenti, divergenti o non convergenti:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left[1-\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right], \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{k}}-1\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

☺☹ – **10)** Determinare se le seguenti serie sono convergenti, divergenti o non convergenti:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 3^k}{4^k\sqrt{k+1}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\sqrt{k+2}}{3^k k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! e^k}{3^k k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! e^k}{k^{k+2}}.$$