Calcolo I, a.a. 2015–2016 — Esercizi 3 — 23 ottobre 2015

☺☹ – **1)** Stabilire se le successioni seguenti hanno limite o no, e quando possibile calcolarlo:

$$a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}\,, \qquad a_n = \frac{2n-1}{3n+2}\,, \qquad a_n = \frac{an+b}{cn+d}\,,\ a,b,c,d \in \mathbf{R}\setminus\{0\}\,, \qquad ☹\ a_n = \cos(n)\,.$$

☺ – **2)** Stabilire se le successioni seguenti hanno limite o no, e quando possibile calcolarlo:

$$a_n = \sqrt{\frac{n^2+2}{2n^2-1}}\,, \qquad a_n = \frac{\mathrm{sen}(n)}{n}\,, \qquad a_n = n - \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

☺ – **3)** Stabilire se le successioni seguenti hanno limite o no, e quando possibile calcolarlo:

$$a_n = \log_2(n)\,, \qquad a_n = (-1)^n \log_2(n)\,, \qquad a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,, \qquad a_n = \sqrt{n^2+n}-n\,.$$

☺ – **4)** Stabilire se le successioni seguenti hanno limite o no, e quando possibile calcolarlo:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \dfrac{n-1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

☺ – **5)** Verificare, usando la definizione, che le seguenti successioni convergono al limite indicato:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4}{2n^2+3} = \frac{1}{2}\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-3n}{n+2} = +\infty\,, \quad \lim_{n\to+\infty} (3\sqrt{n}-4n) = -\infty\,, \quad \lim_{n\to+\infty} (n-\sqrt{n^2-1}) = 0\,.$$

☺ – **6)** Sia a un numero reale e

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a^k\,.$$

Dimostrare, usando la definizione di limite, che a_n converge a $\frac{1}{1-a}$ se $|a|<1$, mentre diverge a $+\infty$ se $a \geq 1$.

☹ – **7)** Si calcolino (usando gli esercizi 5 e 7 del Compito 1) i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{4^n\, n!}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}\,.$$

☺ – **8)** Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\sqrt{2+4+6+\ldots+2n}-n\right]\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1+3+5+\ldots+2n+1}{n+1}-n\right]\,.$$

☹– **9)** Sia a_n una successione decrescente e positiva, e sia b_n una successione positiva tale che

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}\,, \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Dimostrare che b_n è convergente, e trovare un controesempio nel caso in cui b_n cambi segno.

☹☹☹– **10)** Sia m in $\mathbf{N}$ fissato, e sia

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} k^m\,.$$

Calcolare (ricordando l'esercizio 2 del Compito 1)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^m}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^{m+2}}\,, \qquad ☹☹☹\ \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^{m+1}}\,,$$