Calcolo I, a.a. 2015–2016 — Esercizi 1 — 2 ottobre 2015

☺ – **1)** Si dimostri per induzione che, per ogni n in $\mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

e successivamente si calcoli la somma dei primi n termini della successione

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots$$

☺ – **2)** Si dimostri per induzione che, per ogni n in $\mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

Sapendo che la funzione che calcola la somma delle potenze m-sime dei primi $n+1$ numeri naturali (zero incluso) è un polinomio in n di grado $m+1$, come si può fare a calcolarne i coefficienti (☹)? In particolare, quanto vale il termine noto (☺)?

☺ – **3)** Sia $q \neq 1$. Si dimostri per induzione che, per ogni n in $\mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

☺ – **4)** Sia $h \geq -1$. Si dimostri per induzione che, per ogni n in $\mathbf{N}$,

$$(1+h)^n \geq 1 + n\,h\,. \tag{1}$$

La (1) si chiama disuguaglianza di Bernoulli.

☺ – **5)** Si dimostri per induzione che, per ogni n in $\mathbf{N}$,

$$n^n \geq 2^{n-1}\,n!\,.$$

Suggerimento: si usi l'Esercizio 4.

☺ – **6)** Si dimostri per induzione che, per ogni n in $\mathbf{N}$,

$$n! \geq 2^{n-1}\,.$$

☹☹ – **7)** Si dimostri per induzione che, per ogni n in $\mathbf{N}$,

$$n^n \leq 3^n\,n!\,.$$

Suggerimento: si usino, nell'ordine, la formula per la potenza n-sima del binomio (☺), la definizione di coefficiente binomiale (☺), un'astuta maggiorazione (☹), l'isolamento di un paio di termini di una somma (☹), l'Esercizio 6 (☺) e l'Esercizio 3 (☺).

☹ – **8)** Si calcolino, al variare di n in $\mathbf{N}$,

$$1 + \sum_{k=1}^{n} k\,k!\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}\,.$$

☺ – **9)** Si calcoli, al variare di n in $\mathbf{N}$,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\,.$$

☺ – **10)** Determinare il coefficiente del termine indipendente da x negli sviluppi di

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}, \qquad \left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}.$$