# RISULTATI INDISPENSABILI: T. della MISURA

E' comodo lavorare sulla retta ESTESA

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Si aggiungono a $\mathbb{R}$ 2 punti e si estendono alcune (NON TUTTE le) proprietà:

(a) ordine: $-\infty < a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(b) prodotto: $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ se $a > 0$, $\mp\infty$ se $a < 0$.

Talvolta si definisce $0 \cdot (\pm\infty) = 0$

(c) somma: $a \pm \infty = (a + (\pm\infty)) = \pm\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(d) divisione: $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

NON SI DEFINISCONO $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{\pm\infty}{\mp\infty}$

OSS Che succede alla proprietà associativa e distributiva?

$$(+\infty) = (+\infty)\cdot(2-1) \overset{?}{=} (+\infty)\cdot 2 - (+\infty)\cdot 1 =$$
$$= +\infty - \infty \text{ (ahi ahi)}$$

la proprietà distributiva salta, cioè non si estende in modo coerente alle nuove operazioni. Notare che se si definissero $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ etc succederebbe ancora di peggio (salta l'associativa: $\frac{+\infty}{+\infty} = \frac{(+\infty)\cdot 1}{+\infty} = (+\infty)\cdot \frac{1}{+\infty} = +\infty \cdot 0$ etc etc).

OSS Si può estendere anche la TOPOLOGIA:

$A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ aperto $:\Leftrightarrow$ $A = B \cup C$ dove:

- $B$ aperto di $\mathbb{R}$
- $C$ può essere $\emptyset$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b) \cup (a, +\infty)$.

( OSS $x_j \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ $x_j \begin{cases} \to x \in \mathbb{R} \\ \to +\infty \\ \to -\infty \end{cases}$ come al solito )

Le due definizioni base sono:

σ-ALGEBRA $\mathcal{M}$ è una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (cioè $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$) STABILE per intersezioni numerabili $[E_k \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{M}]$ complementazione $[E \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{M}]$ e contenente $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$.

MISURA è una funzione $m : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ σ-ADDITIVA, cioè con la proprietà $\forall E_k \in \mathcal{M}$ disgiunti, $m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(E_k)$.

OSS per essere proprio rigorosi, bisogna aggiungere $m(\emptyset)=0$ (oppure che esiste almeno un ins. di misura finita). Questo serve solo a eliminare il caso degenere $m \equiv +\infty$ $\forall E$ !

OSS $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ sono "abbastanza" tranquilli. In $\mathbb{R}^3$ iniziano patologie inquietanti: ad esempio (nel sistema di assiomi ZFC) è possibile decomporre $B(0,1) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ in 4 insiemi tali che, traslandoli e ruotandoli, e chiamando $A'_j$ i nuovi quattro insiemi, si ottiene

$$A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3 \cup A'_4 = B(0,2)$$

Questo si chiama il "PARADOSSO di BANACH TARSKI" (e invece è un teorema di Hausdorff). Da qui la necessità di restringere il campo: non si può lavorare con tutti gli insiemi di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

TERMINOLOGIA: $E \in \mathcal{M}$, $m(E)=0$ si dice TRASCURABILE; una proprietà che dipende da $x \in \mathbb{R}^n$ e vale per tutti gli $x$ fuori da un insieme trascurabile vale QUASI OVUNQUE.

OSS $E_j$ trascurabili $\Rightarrow \bigcup_{j \geq 1} E_j$ trascurabile.

MISURA di LEBESGUE, ins. MIS. secondo LEBESGUE

Non ripetiamo la costruzione. Ricordiamo che si basa sull'ipotesi: i rettangoli $\prod [a_j, b_j]$ sono misurabili con misura $\prod |b_j - a_j|$.

Per estensioni successive si costruisce la σ-algebra dei Lebesgue-misurabili $\mathcal{M}$ e la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n \equiv \mathcal{L} \equiv m \equiv dx \equiv \ldots$ dotata delle seguenti

PROPRIETÀ base della mis. di LEBESGUE:

1. $E_k \in \mathcal{M}$, $E_k \uparrow \Rightarrow m(E_k) \uparrow m(\bigcup E_k)$
2. $E_k \in \mathcal{M}$, $E_k \downarrow$, $m(E_1) < \infty \Rightarrow m(E_k) \downarrow m(\bigcap E_k)$
3. $m$ è COMPLETA $[E \in \mathcal{M}, m(E)=0, F \subseteq E \Rightarrow m(F)=0]$
4. $m$ è BORELIANA [$\mathcal{M}$ contiene gli aperti $\mathbb{R}^n$]
5. $m$ è REGOLARE
   - INTERNAMENTE $[E \in \mathcal{M} \Rightarrow m(E) = \sup\{m(C) : C \subseteq E \text{ chiuso}\}]$
   - ESTERNAMENTE $[E \in \mathcal{M} \Rightarrow m(E) = \inf\{m(A) : A \supseteq E \text{ aperto}\}]$
6. $m$ è di RADON $[E \in \mathcal{M} \Rightarrow m(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E \text{ compatto}\}$ e inoltre ogni $x \in \mathbb{R}^n$ possiede un intorno di misura finita].

(OSS ulteriore: 4 $\Rightarrow$ 5 $\Rightarrow$ 6 negli spazi metrici completi e separabili).

# FUNZIONI MISURABILI sec. Lebesgue

$f$ semplice ha la forma

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{E_k}}, \quad E_k \in \mathcal{M} \text{ di misura finita, } E_k \text{ DISGIUNTI, } c_k \in \mathbb{R} \ (\text{o } \mathbb{C})$$

$f$ **MISURABILE** $:\Leftrightarrow \{x : f > a\} \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$
$f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$

OSS Il concetto si estende subito alle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ($f$ misur. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ misur.). Di solito si lasciano perdere $\pm\infty$ per funzioni a valori complessi [non che non si possa fare: ad esempio la sfera di Riemann si ottiene aggiungendo a $\mathbb{C}$ un UNICO punto all'$\infty$ etc etc ...]

## PROPRIETÀ base delle f. misurabili secondo LEBESGUE

Qui $f, g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$

1. Funzioni semplici (e costanti) sono misurabili.
2. $f, g$ misurabili $\Rightarrow$ $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $|f|$, e (se definite) $f \pm g$, $\frac{f}{g}$ sono misur.
3. $f_j$ successione di f. misurabili $\Rightarrow$ $\limsup f_j$, $\liminf f_j$, $\sup f_j$, $\inf f_j$ misurabili (e quindi $\lim f_j$ se esiste).
4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile, $\varphi : A \to \mathbb{R}$ continua, $A$ aperto $\supseteq \mathrm{img}\, f$ $\Rightarrow$ $\varphi \circ f$ misurabile
5. Se $f \geq 0$ misurabile allora esiste una successione $\varphi_j$ di funzioni semplici t.c. $0 \leq \varphi_j \uparrow f$ QUASI OVUNQUE.

# INTEGRALE di LEBESGUE

Qui si vede l'efficienza della teoria di Lebesgue.

**DEF** dell' $\int$ di LEBESGUE

- •) Se $\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{1}_{E_k}$ è una f. SEMPLICE ($\exists E_k$ disg.)

  si definisce
$$\boxed{\int \varphi \, dx := \sum_{k=1}^{N} c_k \, m(E_k)}$$

- •) Se $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ è misurabile $\geq 0$,
$$\boxed{\int f \, dx := \sup \left\{ \int \varphi \, dx : 0 \leq \varphi \leq f, \ \varphi \text{ semplice} \right\}}$$

- •) Se $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ è misurabile qualunque, si calcolano $\int f^+ dx$ e $\int f^- dx$, e NEL CASO CHE almeno uno dei due sia FINITO, si dice che l'INTEGRALE di $f$ è DEFINITO ("$f$ INTEGRABILE") e si pone $\boxed{\int f \, dx = \int f^+ dx - \int f^- dx}$

- •) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è misurabile, ci si limita a considerare il caso in cui l'integrale è finito (e si pone $\int f \, dx = \int \mathrm{Re} f \, dx + i \int \mathrm{Im} f \, dx$).

- •) Se $E$ è misurabile e $f$ è misurabile ~~[illegible]~~, si pone
$$\int_E f \, dx := \int \mathbb{1}_E \cdot f \, dx .$$
Notare che per definire $\int_E$ è sufficiente che $f$ sia definita nell'insieme $E$.

OSS In pratica "tutte le funzioni misurabili sono integrabili", o quasi...

# SPAZI di FUNZIONI SOMMABILI

$\boxed{L^1(\mathbb{R}^n) = L^1}$ è lo spazio delle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ misurabili tali che $\|f\|_{L^1} := \int |f|\,dx < \infty$.

$\boxed{L^1(\Omega)}$ dove $\Omega$ è un insieme qualunque misurabile (anche se poi si prende aperto per varie necessità) è lo spazio delle $f : \Omega \to \mathbb{C}$ misurabili (stessa definizione che su $\mathbb{R}^n$) t.c. $\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f|\,dx < \infty$.

SONO UTILISSIMI gli SPAZI LOCALI:

$\boxed{L^1_{loc}(\Omega)}$ è lo spazio delle $f : \Omega \to \mathbb{C}$ misurabili tali che $\forall K \subset\subset \Omega$ ($K$ tale che $\overline{K}$ è compatto e contenuto in $\Omega$) $\int_K |f|\,dx < \infty$.

$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \equiv L^1_{loc}$.

NATURALMENTE si definiscono anche, per $1 \leq p < \infty$:

$L^p(\Omega)$ spazio delle $f$ t.c. $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p} < \infty$

e poi

$L^\infty(\Omega)$ spazio delle $f$ t.c. $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{C : |f| \leq C \text{ q.o.}\} < \infty$.

e si scrive $L^p(\mathbb{R}^n) \equiv L^p$, $L^\infty(\mathbb{R}^n) \equiv L^\infty$.

OSS Notare che stiamo già lavorando, senza dirlo ogni volta, con CLASSI di EQUIVALENZE $[f]$ invece che con le singole funzioni $f$. Bisogna stare attenti: ogni volta che scriviamo "$f$", le formule devono essere indipendenti dalla scelta del rappresentante $\in [f]$.

## PROPRIETÀ FONDAMENTALI dell' $\int$

Gli enunciati seguenti sono fra i teoremi più importanti di tutta la matematica:

**PROP** $\|\cdot\|_{L^1}$ è una NORMA su $L^1$ che lo rende uno spazio di BANACH. $\int : L^1 \to \mathbb{C}$ è un funzionale lineare limitato e positivo, di norma 1
$\left( \left|\int f\,dx\right| \le \int |f|\,dx = \|f\|_{L^1} \right)$ -

OSS Risultati simili per $L^1(\Omega)$, $L^p(\Omega)$: anch'essi sono spazi di Banach. Notare che se non si passa alle classi di equivalenza, $\|\cdot\|_{L^1}$ NON È UNA NORMA (perché??) -

**TEOR** Siano $f_k, f, g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ misurabili.

(i) BEPPO LEVI: se $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ q.o. $\Rightarrow \underset{(\sup)}{\lim} \int f_j = \int \underset{(\sup)}{\lim} f_j$

(ii) FATOU: se $f_j \ge 0$ $\forall j$ q.o. $\Rightarrow \int \liminf f_j \le \liminf \int f_j$

(iii) LEBESGUE (conv. dominata): se $f_j \to f$ q.o., $g \in L^1$, $|f_j| \le g$ $\forall j$ q.o. $\Rightarrow \|f_j - f\|_{L^1} \to 0$

OSS a) per FATOU basta l'HP: $\forall j, f_j \ge g \in L^1$

b) Per Lebesgue si può lavorare in $L^1(\Omega)$ senza (quasi) modifiche

c) Per Lebesgue basta l'HP: $|f_j| \le g_j$ dove $g_j \in L^1$ converge in $L^1$ a $g$

d) È facile dare una versione $L^p$ di LEBESGUE.

e) È ovvio, ma meglio dirlo, che gli integrali in (i), (ii) possono anche essere uguali a $+\infty$

## DISUG. di HÖLDER

Siano $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ misurabili ($\Omega$ misurabile).
Siano $p, q \in [1, \infty]$. $\left(\frac{1}{\infty} := 0\right)$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \|fg\|_{L^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

OSSERVAZIONI

① Abbiamo leggermente abusato le notazioni: se $f \notin L^p(\Omega)$ scriviamo lo stesso $\|f\|_{L^p(\Omega)} = +\infty$. Il teorema vale in tutti i casi, anche se le norme fanno $+\infty$. In particolare se $f \in L^p, g \in L^q \implies fg \in L^1$.

② PRIMA GENERALIZZAZIONE:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \implies \|fg\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

③ VERSIONE EQUIVALENTE: $(0^0 := 0)$

$$0 \le \theta \le 1, \implies \int |f|^{1-\theta} \cdot |g|^\theta \le \left(\int |f|\right)^{1-\theta} \left(\int |g|\right)^\theta$$

④ SECONDA GENERALIZZAZIONE:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N} \implies \|f_1 \cdots f_N\|_{L^p} \le \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_N\|_{L^{p_N}}$$

o, equivalentemente:

$$\theta_j \in [0,1], \ \sum \theta_j = 1 \implies \int |f_1|^{\theta_1} \cdots |f_N|^{\theta_N} \le \left(\int |f_1|\right)^{\theta_1} \cdots \left(\int |f_N|\right)^{\theta_N}$$

## DISUG. di INTERPOLAZIONE

$$\theta \in [0,1], \ p_0, p_1 \in [1, \infty], \quad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \implies \|f\|_{L^{p_\theta}} \le \|f\|_{L^{p_0}}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{L^{p_1}}^{\theta}$$

In particolare, se $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1} \implies f \in L^{p_\theta}$

$$\left[\text{DIM: } |f|^{p_\theta} = \left(|f|^{p_0}\right)^{\frac{p_\theta}{p_0}(1-\theta)} \cdot \left(|f|^{p_1}\right)^{\frac{p_\theta}{p_1}\theta}\right].$$

Ricordiamo anche un altro fatto utile:

**PROP** Se $\|f_j - f\|_{L^p} \to 0$ $(1 \le p \le \infty)$ allora esiste una sottosuccessione $f_{j_k}$ che converge a $f$ q.o. (ma in genere, se $p<\infty$, $f_j \not\to f$ q.o.)

## IL TEOREMA di FUBINI-TONELLI

Un altro risultato in cui la teoria di Lebesgue si rivela molto più efficiente di quella di Riemann:

**TEOR** [FUBINI+TONELLI] Sia $f : \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^k_y \to [-\infty, +\infty]$ misurabile. Supponiamo che l'integrale di $f$ sia definito. Allora vale quanto segue:

- per q.o. $x$ l'integrale $\int f(x,y)\,dy$ è definito;
- per q.o. $y$ l'integrale $\int f(x,y)\,dx$ è definito;
- i seguenti integrali sono definiti e coincidono:

$$\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\left(\int f(x,y)\,dx\right)dy = \int\left(\int f(x,y)\,dy\right)dx.$$

OSS In particolare si applica:

SE $\boxed{f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)}$ (e quindi tutti gli integrali sono finiti: T. di FUBINI)

SE $\boxed{f \ge 0}$ (e quindi tutti gli integrali sono $\ge 0$; T. di TONELLI).

# DENSITÀ e TRASLAZIONI

Ricordiamo che $\forall \Omega$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$ (anche tutto $\mathbb{R}^n$)

- •) $C_c(\Omega)$ è DENSO in $L^p(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$
- •) $C_c(\Omega)$ NON È DENSO in $L^\infty(\Omega)$

[converg. in $L^\infty \Leftrightarrow$ converg. UNIF. $\Rightarrow$ LIMITE $\in C$]

Questo fatto si può usare per dimostrare che le TRASLAZIONI sono OPERATORI CONTINUI.

Se $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ è misurabile e $h \in \mathbb{R}^n$, poniamo

$$\tau_h f(x) := f(x+h) \qquad \text{(TRASLAZIONE)}.$$

Notiamo che

1. $f$ UNIFORM. CONTINUA $\Rightarrow \lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^\infty} = 0$
   cioè $\tau_h f \to f$ UNIFORMEMENTE per $h \to 0$
   [è praticamente la definizione!
   $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$ se $|h| < \delta$ ]
2. $f \in C_c(\Omega) \Rightarrow \tau_h f \to f$ UNIFORM. per $h \to 0$
   [ $f$ è U. CONT. ]
3. $f \in L^1 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^1} \to 0$. Anche in $L^p$ purché $1 \leq p < \infty$.
   [ Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Prendo $g \in C_c$ con $\|g - f\|_{L^p} < \varepsilon$. Allora
   $$\|\tau_h f - f\|_{L^p} \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p}$$
   $$\leq 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_{L^p}$$
   $$\leq 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_{L^\infty} \cdot M$$
   e se $h$ è abb. piccolo $\leq 3\varepsilon$ ].

# La CONVOLUZIONE

Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ misurabili.
Diciamo che il loro PRODOTTO di CONVOLUZIONE (la loro CONVOLUZIONE) è definito se, per q.o. $x$, l'integrale

$$\boxed{f * g(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy}$$

è definito. Notare che in tal caso vale

$$\boxed{f * g(x) = g * f(x)} \quad \text{per q.o. } x.$$

Definizione analoga se $f, g$ a valori $\mathbb{C}$.

① Se $f, g \geq 0$ misurabili, allora $f * g$ è definita, misurabile, $\geq 0$, e vale

$$\int f * g \, dx = \left(\int f \, dx\right) \cdot \left(\int g \, dx\right)$$

[Prendiamo $0 \leq \varphi_j \uparrow f$, $0 \leq \psi_j \leq g$, $\varphi_j$ e $\psi_j$ semplici. Notiamo che $\varphi_j * \psi_j \geq 0$ è misurabile (facile), e per Beppo Levi $0 \leq \varphi_j * \psi_j \uparrow f * g$ q.o. Quindi $f * g$ è misurabile. La formula: FUBINI-TONELLI]

② Se $f, g \in L^1$ allora $f * g \in L^1$ e

$$\boxed{\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}}$$

[Il punto ① applicato a $f^+ * g^+$, $f^- * g^-$, $f^+ * g^-$, $f^- * g^+$ dice che queste quattro funzioni sono misurabili, hanno integrale finito. Quindi
$f * g = f^+ * g^+ - f^+ * g^- - \dots + \dots$
è misurabile e ha integrale finito. La disuguaglianza vale anche $\forall x$

$$|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x)$$

e quindi

$$\int |f * g| \leq \int |f| * |g| = \left(\int |f|\right) \cdot \left(\int |g|\right) ].$$

③ YOUNG: se $f \in L^p$, $g \in L^q$, e $p,q,r \in [1,\infty]$,

$$\boxed{1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \Rightarrow \|f*g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q}}$$

(e $f*g \in L^r$).

[ se $\boxed{r=1} \Rightarrow p=q=1 \Rightarrow$ già visto.

se $\boxed{r=\infty \ \text{e}\ p=\infty}$ (oppure $q=\infty$) si ha $q=1$; come al punto ② basta dimostrare il risultato per $\underbrace{f,g \ge 0}$; la misurabilità è ovvia, e la disuguaglianza segue da

$$\int f(x-y)g(y)\,dy \le \|f\|_{L^\infty}\cdot\int g \quad \text{q.o.}$$

se $\boxed{r \in (1,\infty],\ p,q \in (1,\infty)}$, scriviamo

$$f(x-y)g(y) = \left(f(x-y)^p g(y)^q\right)^{1/r}\left(f(x-y)^p\right)^{1/p-1/r}\left(g(y)^q\right)^{1/q-1/r}$$

(nel caso $r=\infty$ si ha $1/r=0$ e il primo termine non c'è).

Dato che $\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)=1$

per HÖLDER abbiamo (integrando in $y$).

(1) $f*g(x) \le (f^p*g^q)^{1/r}\cdot\|f\|_{L^p}^{1-p/r}\ \|g\|_{L^q}^{1-q/r}$

Elevando alla $r$ e integrando in $x$ $\Rightarrow$

$$\|f*g\|_{L^r}^r \le \left(\int f^p*g^q\right)\cdot\|f\|_{L^p}^{r-p}\ \|g\|_{L^q}^{r-q}$$

e applicando il punto ② (dato che $f^p, g^q \in L^1$)

$$\le \|f\|_{L^p}^p\ \|g\|_{L^q}^q\cdot\|f\|_{L^p}^{r-p}\cdot\|g\|_{L^q}^{r-q}$$

da cui la tesi. Notare che se $r=\infty$ l'ultimo passaggio non è necessario e al punto (1) abbiamo già finito (prendere il sup ess in $x$) ].

OSS La costante 1 nella stima di YOUNG non È OTTIMALE; la disuguaglianza vale con costanti minori di 1 (tranne che nei casi estremi) [BRASCAMP-LIEB 1976].

OSS Alcuni casi di utilizzo frequente:

$$L^1 * L^1 \subseteq L^1$$

$$L^p * L^{p'} \subseteq L^\infty \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$$

$$L^1 * L^p \subseteq L^p, \qquad 1 \le p \le \infty .$$

OSS Quando $f * g$ è definito è commutativo

$$f * g(x) = g * f(x)$$

E quando i prodotti seguenti sono definiti, è anche associativo

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

e distributivo rispetto alla somma

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

[facili].

# IL SUPPORTO di FUNZIONI e CONVOLUZIONI

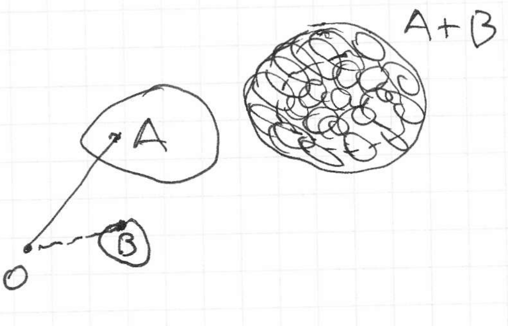
Se $f \in C(\mathbb{R}^n)$ o $C(\Omega)$, il SUPPORTO è il chiuso

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

Se però $g \sim f$, $g$ misurabile, possiamo fare in modo che la definizione precedente applicata a $g$ dia un qualunque chiuso contenente $\operatorname{supp} f$ (come?)

QUINDI per funzioni misurabili serve una definiz. più sofisticata. Allora diciamo che il SUPPORTO di una $f$ misurabile è il COMPLEMENTARE dell'UNIONE di tutti gli aperti $\omega$ tali che $f = 0$ q.o. su $\omega$.

1. Se $f \in C(\Omega)$ le due nozioni coincidono [OVVIO].
2. Se $f$ è misurabile, $f = 0$ q.o. su $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} f$
   [Basta scrivere l'aperto $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} f$ come unione di una SUCCESSIONE di aperti $\omega_j$ su cui $f = 0$ q.o.; questo si può perché . . . . ]
3. Il ruolo del supporto nel prodotto di convoluzione è fondamentale. Siano $f, g$ per cui $f * g$ è definito.
   Se $\boxed{\operatorname{supp} f \subseteq A,\ \operatorname{supp} g \subseteq B \Rightarrow \operatorname{supp} f * g \subseteq \overline{A+B}}$




[se $y \in B$ e $x - y \in A \Rightarrow x \in A+B$. QUINDI se $x \notin \overline{A+B}$ vuol dire che: o $y \notin B$, oppure $x - y \notin A$, e pertanto $f(x-y) \cdot g(y) = 0$ q.o. cioè $f * g(x) = 0$ per TUTTI gli $x \notin \overline{A+B}$].

OSS Notare che $f * g(x) = 0 \quad \forall x \notin A+B$ (non solo q.o.)

Si nota già un po' di REGOLARIZZAZIONE.

(4) Supponiamo che $\boxed{\operatorname{supp} f \doteq K}$ sia compatto, e sia $C$ un altro compatto. ALLORA:

$$x \in C \Rightarrow f * g(x) = \int_K f(y)\, g(x-y)\, dy$$
$$= \int_K f(y)\, \mathbb{1}_{C-K}\, g(x-y)\, dy$$

perché $x - y \in C - K$

Quindi per YOUNG $\Rightarrow$ se $\boxed{1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$

$$\Rightarrow \boxed{\|f * g\|_{L^r(C)} \le \|f\|_{L^p(K)} \cdot \|g\|_{L^q(C-K)}}$$

Dato che anche $C - K$ è compatto, abbiamo dimostrato che:

$$\boxed{f \in L^p_c,\ g \in L^q_{loc} \Rightarrow f * g \text{ definito e } \in L^r_{loc}}$$

(sempre se $1 + 1/r = 1/p + 1/q$).

OSS Chiariamo bene le notazioni:

$\boxed{L^p_c(\mathbb{R}^n) = L^p_c}$: FUNZIONI di $L^p$ con supporto compatto (in $\mathbb{R}^n$)

$\boxed{L^p_c(\Omega)}$: FUNZIONI di $L^p(\Omega)$ con supporto compatto e contenuto in $\Omega$.

Da mettere insieme agli spazi

$C_c(\Omega)$, $C^k_c(\Omega)$, $C^\infty_c(\Omega)$.

OSS RIASSUMENDO, se $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, abbiamo

$$\boxed{\begin{array}{l} L^p * L^q \subseteq L^r \\ L^p_c * L^q_{loc} \subseteq L^r_{loc} \end{array}}$$

# REGOLARITÀ della CONVOLUZIONE



Fenomeno generale: la convoluzione REGOLARIZZA, ossia $f*g$ somma le proprietà buone delle 2 funzioni.

1) $\boxed{L^\infty_{loc} * L^1_c \subseteq C}$ $\boxed{L^\infty_c * L^1_{loc} \subseteq C}$

Sappiamo già che $L^\infty_{loc} * L^1 \subseteq L^\infty_{loc}$, $L^\infty * L^1_{loc} \subseteq L^\infty_{loc}$. Ora diciamo che se una delle due è a supporto compatto, il risultato è sempre una funzione continua

[Fissiamo $x_0$, vogliamo mostrare che $f*g$ è continua in $x_0$; ci interessano solo i valori di $f*g(x)$ per $x \in K = \overline{B(x_0,1)}$ e d'altra parte $f$ ha supporto $\subseteq A$ compatto, quindi possiamo supporre che $g$ sia a supporto in $K-A$ compatto. OSSIA, ci basta dim. che $L^\infty_c * L^1_c \subseteq C$.

Se $x_n \to x_0$, $f*g(x_n) = \int f(y)g(x_n-y)\,dy$,

$$|f*g(x_n) - f*g(x_0)| \leq$$
$$\leq \int |f(y)| \cdot |g(x_n-y) - g(x_0-y)|\,dy$$
$$\leq \|f\|_{L^\infty} \cdot \|\tau_h G - G\|_{L^1}$$

dove $G = g(x_0-y)$ e $h = x_n - x_0 \to 0$

$\Rightarrow \;\to\; 0 \;\Rightarrow f*g(x_n) \to f*g(x_0)$ ].

ESERC $f \in L^p$, $g \in L^q$, $1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \Rightarrow f*g$ è CONTINUA!

OSS Notare che le traslazioni COMMUTANO:

$$\tau_h(f*g) = (\tau_h f)*g = f*(\tau_h g)$$

Quindi anche i RAPPORTI INCREMENTALI

Ne segue →

② $\boxed{C^1_c * L^1_{loc} \subseteq C^1}$, $\boxed{C^1 * L^1_c \subseteq C^1}$ (r)

e $D(f*g) = (Df)*g$.

In generale:

$$\left[\begin{array}{l} C^k_c * L^1_{loc} \subseteq C^k, \quad C^k * L^1_c \subseteq C^k, \quad D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g \\ C^k_c * C^j \subseteq C^{k+j}, \quad D^{\alpha+\beta}(f*g) = D^\alpha f * D^\beta g \end{array}\right.$$

[Vediamo le prime, le altre sono praticam. uguali. Come in ① basta dimostrare $C^1_c * L^1_c \subseteq C^1$.

La derivata di una funzione $C^1$ è il limite del rapporto increm.

$$\partial_j f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tau_{\varepsilon e_j} f(x) - f(x)}{\varepsilon}$$

Allora

$$\frac{\tau_{\varepsilon e_j}(f*g) - f*g}{\varepsilon} = \left(\frac{\tau_{\varepsilon e_j} f - f}{\varepsilon}\right) * g$$

ma essendo $f \in C^1_c \Rightarrow$ il rapp. increm. converge UNIFORMEMENTE a $\partial_j f$:

~~YOUNG~~ $\cancel{\Rightarrow \left\| \frac{\tau_{\varepsilon e_j}(f*g) - f*g}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty} \leq \left\| \frac{\tau_{\varepsilon e_j} f - f}{\varepsilon} \right\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}}$

$\cancel{\to 0}$; ~~passando al limite,~~ $\cancel{\partial_j(f*g) = (\partial_j f)*g}$ ~~]~~.

per la disug. di YOUNG

$$\left\| \left(\frac{\tau_{\varepsilon e_j} f - f}{\varepsilon}\right) * g - \partial_j f * g \right\|_{L^\infty} \leq$$

$$\leq \left\| (\quad) - \partial_j f \right\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1} \to 0$$

e quindi $\dfrac{\tau_{\varepsilon e_j}(f*g) - f*g}{\varepsilon} \to (\partial_j f)*g$ UNIFORM.

$\Rightarrow f*g$ è derivabile e la sua derivata è $\partial_j f * g$]

# REGOLARIZZAZIONI

Le osservazioni precedenti sono alla base di una delle tecniche più utili in analisi, soprattutto per le EDP, inventata da K.O. FRIEDRICHS.

**DEF** Un <u>MOLLIFICATORE</u> $\rho_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, è una funzione test della forma $\rho_\varepsilon(x) = \rho(x/\varepsilon)\cdot\varepsilon^{-n}$, dove $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ha le proprietà

(i) $\operatorname{supp}\rho = \overline{B(0,1)}$, e $\rho > 0$ su $|x| < 1$

(ii) $\int \rho \, dx = 1$

In particolare si ha $\int \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$.

**DEF** Data $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la sua <u>REGOLARIZZATA</u> è la funzione $f_\varepsilon$ data da

$$\boxed{f_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon * f(x)} \qquad \varepsilon > 0$$

## PROPRIETÀ di $f_\varepsilon$

1. $f_\varepsilon \in C^\infty$ [ok]
2. $D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha \rho_\varepsilon) * f \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ [ok]
3. Se $f, g \in L^p$ vale $\forall \varepsilon > 0$ $(1 \le p \le \infty)$

$$\boxed{\|f_\varepsilon\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}, \quad \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p} \le \|f - g\|_{L^p}}$$

[dalla dis. di YOUNG]

4. $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subseteq \operatorname{supp} f + B(0,\varepsilon)$ [ok]


5. $\boxed{f \in C_c \Rightarrow f_\varepsilon \in C_c^\infty \text{ e } \|f_\varepsilon - f\|_{L^\infty} \to 0 \text{ per } \varepsilon \to 0}$

[ $f_\varepsilon(x) - f(x) = \int \rho_\varepsilon(y)\,[f(x-y) - f(y)]\,dy$

ma $|(x-y) - x| = |y| \le \varepsilon$ perché $y \in \operatorname{supp}\rho_\varepsilon$

e inoltre $f \in C_c \Rightarrow f$ UNIF. CONTINUA, (b)

quindi $\forall \delta\ \exists \varepsilon$: se $|p-q|<\varepsilon$ allora

$|f(p)-f(q)|<\delta \Rightarrow |f_\varepsilon - f| \le \int \rho_\varepsilon \cdot \delta = \delta$ ]

(6) $1 \le p < \infty$: se $f \in L^p \Rightarrow \|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \to 0$ per $\varepsilon \to 0$.

Inoltre $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$ e esiste $\varepsilon_j \to 0$ tale che

$f_{\varepsilon_j} \to f$ q.o.

[Solo la prima proprietà, le altre sono già note e le abbiamo riportate per ripasso.

Sappiamo che $C_c$ è denso in $L^p$, QUINDI:

$\forall \delta > 0$ esiste $g \in C_c$ con $\|f-g\|_{L^p} < \delta$.

ALLORA

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \le \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} + \|g-f\|_{L^p}$$

$$\le \delta + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} + \delta$$

e dato che $\|g_\varepsilon - g\|_{L^p} \le C \|g_\varepsilon - g\|_{L^\infty} \to 0$

(ricordare che $g \in C_c$), se $\varepsilon$ è abb. piccolo otteniamo

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \le 3\delta \quad ]$$

(7) $\boxed{1 \le p < \infty,\ f \in L^p_{loc} \Rightarrow f_\varepsilon \to f \text{ in } L^p(K)\ \forall K \text{ compatto (ossia } f_\varepsilon \to f \text{ in } L^p_{loc})}$

[basta usare le proprietà dei supporti]

OSS In particolare abbiamo (ri)dimostrato:

$C_c^\infty$ è DENSO in $L^p$ $\forall\ 1 \le p < \infty$.

[le $g_\varepsilon$ del punto (6): $\|f - g_\varepsilon\|_{L^p} \to 0$ ].

OSS Se $f \in C$, $f_\varepsilon \to f$ unif. sui compatti

OSS Se $f \in L^1_{loc} \Rightarrow \exists\ \varepsilon_j \downarrow 0$ tale che $f_{\varepsilon_j} \to f$ q.o.

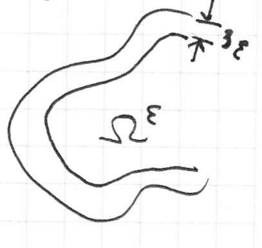
# REGOLARIZZAZIONI in $\Omega$

Si può fare qualcosa di analogo anche per funzioni definite su un APERTO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Il problema principale è IL BORDO
[se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ non c'è alcun controllo sul comportamento di $f$ vicino a $\partial\Omega$ e sulla crescita di $f(x_k)$ quando $x_k \to \partial\Omega$].

DEF Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$.

PASSO 1: ci allontaniamo di $\varepsilon$ dal bordo

$$\Omega^\varepsilon := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > 3\varepsilon\}$$




PASSO 2: tronchiamo $f$

$$f \longmapsto f \cdot 1\!\!1_{\Omega^\varepsilon} = \begin{cases} f & \text{su } \Omega^\varepsilon \\ 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \setminus \Omega^\varepsilon \end{cases}$$

PASSO 3: regolarizziamo (si può perché $f \cdot 1\!\!1_{\Omega^\varepsilon} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ !)

$$\boxed{f_\varepsilon := \rho_\varepsilon * (f \cdot 1\!\!1_{\Omega^\varepsilon})}$$

$f_\varepsilon$ si dice la REGOLARIZZATA di $f$.

PROPRIETÀ (senza dim).

$f \in C_c(\Omega) \Rightarrow f_\varepsilon \to f$ UNIF. su $\Omega$
$f \in C(\Omega) \Rightarrow f_\varepsilon \to f$ UNIF. sui compatti di $\Omega$
$f \in L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty \Rightarrow f_\varepsilon \to f$ in $L^p(\Omega)$

OSS Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\Omega$ è LIMITATO, allora $f_\varepsilon \in C^\infty_c(\Omega)$; in particolare $C^\infty_c(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Se $\Omega$ non è limitato, $f \in C^\infty(\Omega)$ ma può avere supporto non compatto [si può OVVIARE anche a questo problema ma lasciamo stare]

# PERCHÉ le FUNZIONI TEST si CHIAMANO COSÌ?

**LEMMA** $\Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$.

1) Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\int f\varphi = 0 \ \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega) \Rightarrow$
$$f \equiv 0 \text{ q.o.}$$
2) Se $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\int f\varphi = \int g\varphi \ \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega) \Rightarrow$
$$f = g \text{ q.o.}$$

Quindi per verificare una uguaglianza q.o. è sufficiente TESTARLA sulle $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$.

Gli operatori
$$\boxed{T_\varphi(f) = \int_\Omega f\varphi\, dx}$$
sono fondamentali in analisi (non sono altro che la dualità $< L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega) >$).

[la proprietà 2) segue dalla 1).
Dimostriamo la 1): $f_\varepsilon = \rho_\varepsilon * (f \cdot \mathbb{1}_{\Omega^\varepsilon})$,
prendiamo $x \in \Omega$ tale che
$$d(x, \partial\Omega) > 6\varepsilon$$
e osserviamo che allora
$$f_\varepsilon(x) = \int f(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy$$
(cioè non c'è bisogno di troncare $f$)
Ma per HP questo implica $f_\varepsilon(x) = 0$!
Dato che $f_{\varepsilon_j} \to f$ q.o., otteniamo $f = 0$ q.o.]

# DISTRIBUZIONI

Consideriamo la FUNZIONE di HEAVISIDE su $\mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 . \end{cases}$$

$\boxed{\text{D: QUANTO fa la DERIVATA di } H, \; H'(x)\,?}$

Oss Si potrebbe rispondere (e Calcolo 1 si fa così): H è DERIVABILE se $x > 0$ e $x < 0$, con derivata nulla, e NON È DERIVABILE in $x = 0$.

OBIEZIONE: che importanza ha che H non sia derivabile SOLO IN UN PUNTO? tanto adesso stiamo lavorando con funzioni definite q.o., e il valore di $H'$ in 0 non HA IMPORTANZA. Cioè potremmo dire:

$$\underline{H' = 0 \quad \text{quasi ovunque}} \quad (\text{giusto!}).$$

Solo che questo modo di "estendere" il concetto di derivata a funzioni definite q.o. è PESSIMO:

1. NON VALE il teorema fond. del calcolo:
$$\int_{-1}^{1} H'(x) = \int 0 = 0 \neq H(1) - H(-1) = 1 \,!$$
2. NON SI ESTENDE alle funzioni nella classe di equivalenza (es. la f. di DIRICHLET è nulla quasi ovunque ma non è derivabile in NESSUN PUNTO).
3. Esempi dalla fisica e dalle eq. differenziali suggeriscono che SI PUÒ FARE DI MEGLIO

RIPROVIAMO. Questo modo di procedere è alla base della teoria delle distribuzioni.

IDEA (di Schwartz, ispirata a vari concetti precedenti di DERIVATA DEBOLE): USIAMO le FUNZIONI TEST

Se vogliamo dire che $g = f'$ (q.o.), un modo equivalente è

$$\int_\Omega g\varphi = \int_\Omega f'\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Il vantaggio è che (se $f \in C^1$) possiamo scrivere

$$\int f'\varphi = -\int f\varphi' \qquad (\varphi \in C_c^\infty !!)$$

e quindi un modo equivalente di dire che $g = f'$, SENZA USARE $f'$, è

$$(*) \quad \boxed{\int_\Omega g\varphi = -\int_\Omega f\varphi' \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)}$$

Solo che c'è un DETTAGLIO:

- qualche volta (per certe funzioni misurabili $f$) si riesce a trovare una funzione $g$ che verifica la $(*)$, e si chiama spesso la DERIVATA DEBOLE di $f$
- qualche volta no ... ma qui LAURENT SCHWARTZ ebbe un'idea geniale: non fa niente, possiamo procedere lo stesso.

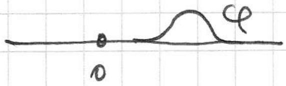
<u>ESEMPIO</u> $H(x)$ Heaviside su $\mathbb{R}$.

$$``\int H'\varphi" = -\int H\varphi' = -\int_0^\infty \varphi'\,dx = \varphi(0)$$

Se proviamo ad applicare il procedimento alla funzione di Heaviside, vediamo che la sua derivata debole dovrebbe essere una funzione $H'$ con la proprietà

$$\int H'\varphi = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

Solo che <u>nessuna funzione ha questa proprietà</u>:




[Basta prendere $\varphi$ con supporto che non tocca $0$ $\Rightarrow \int H'\varphi = 0 \Rightarrow H'$ deve valere $0$ su $x > 0$ e su $x < 0$ $\Rightarrow$ ma allora $H'$ è nulla q.o. e quindi $\int H'\varphi = 0 \ \forall \varphi$, assurdo.]

**<u>DEFINIZIONE</u>** La DERIVATA (distribuzionale) di $H$ è il FUNZIONALE su $C_c^\infty(\Omega)$ dato da

$$T\varphi = \varphi(0)$$

L'idea è che le funzioni $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ sono indistinguibili dal funzionale associato

$$T_f\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad , \ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

(nel senso che $f = 0$ q.o. $\Leftrightarrow T_f = 0$, $f = g$ q.o. $\Leftrightarrow T_f = T_g$).

- Se $f$ ha derivata debole $f'$, si ha $(T_f)' = T_{f'}$.
- Se $f$ non ha derivata debole, PAZIENZA: si può sempre utilizzare il funzionale associato per definire la DERIVATA (DISTRIBUZIONALE).

## DEFINIZIONE di $\mathcal{D}'(\Omega)$

**DEF** $\Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$. Lo SPAZIO delle F. TEST $\boxed{\mathcal{D}(\Omega)}$ è lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ dotato della seguente convergenza:

$$\varphi_j \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) :\Leftrightarrow \text{ esiste } K \subset\subset \Omega \text{ tale che } \operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K \ \forall j \text{ e inoltre } D^\alpha \varphi_j \to 0 \text{ UNIFORM. } \forall \alpha.$$

**DEF** Lo SPAZIO delle DISTRIBUZIONI $\mathcal{D}'(\Omega)$ è lo spazio di tutti i funzionali lineari

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$$

che sono CONTINUI nel senso che

$$T(\varphi_j) \to 0 \quad \forall \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 .$$

OSS Definizione elegante ma POCO PRATICA in alcuni casi; meglio averne due.

DEF. EQUIVALENTE: $T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow T$ è un funzionale lineare $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ tale che, $\forall K \subset\subset \Omega$, esistono $C, m$ tali che

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^\infty}$$

per tutte le $\varphi$ con supporto in $K$.

[verifichiamo l'equivalenza. $\Leftarrow$: è IMMEDIATA.
$\Rightarrow$: per assurdo, se esistesse $K \subset\subset \Omega$ tale che la 2ª è falsa, potremmo trovare $\forall m$ una $\varphi_m$ con supporto in $K$ e $\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^\infty} \leq 1/m$ ma allo stesso tempo $|T(\varphi_m)| \geq 1$; ma allora $\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ mentre $T(\varphi_m) \not\to 0$ ].

## PRATICA con la DEFINIZIONE di $\mathcal{D}'(\Omega)$



① Tanto per cominciare, tutte le funzioni $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ sono distribuzioni, con l'identificazione

$$u \longmapsto T_u \quad , \quad T_u(\varphi) = \int_\Omega u\varphi$$

Spesso si scrive $u$ invece di $T_u$:

$$\boxed{u(\varphi) = \int_\Omega u\varphi\, dx} . \quad u \in L^1_{loc}(\Omega)$$

[Verifica: se $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D}$, in particolare $\varphi_j \to 0$ uniformemente e $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ limitato $\Rightarrow |u(\varphi_j)| \leq \|\varphi_j\|_{L^\infty} \cdot \int_K |u| \to 0$ .]

QUINDI

$$\boxed{L^1_{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)} \qquad \Big( \underset{\text{INIETTIVA}}{\underset{\sim}{\subseteq}} \Big)$$

② LA DELTA di DIRAC. $\boxed{\delta(\varphi) = \varphi(0)}$

[$\delta$ è lineare (ovviamente) e se $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D}$ in particolare $\varphi_j(0) \to 0 \Rightarrow \delta(\varphi_j) \to 0$].

[Usando l'altra def.: $|\delta(\varphi)| \leq |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}$].

③ Su $\mathbb{R}^n$ scriviamo semplicemente $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}'$. Tutte le funzioni continue o $L^p$ sono distribuzioni:

$$C(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1_{loc} \subseteq \mathcal{D}' \quad , \quad L^p \subseteq L^1_{loc} \subseteq \mathcal{D}' .$$

MA $e^{1/x^2}$ $(\notin L^1_{loc})$ NON È UNA DISTRIBUZIONE

[Se $\varphi(0) > 0 \Rightarrow T_f(\varphi)$ non è definito per $f = e^{1/x^2}$].

Al massimo possiamo dire che

$$e^{1/x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \setminus \{0\}) .$$

# CONVERGENZA in $\mathcal{D}'(\Omega)$

È utile dare una nozione di convergenza in $\mathcal{D}'(\Omega)$, che si rivela particolarmente COMODA perché è semplicemente la "convergenza punto per punto":

**DEF** $u_j, u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diciamo che <u>$u_j$ converge a $u$ nel senso delle distribuzioni</u>, $u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$, se

$$u_j(\varphi) \to u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

<u>OSS</u> Il motivo per cui la convergenza in $\mathcal{D}'$ è comoda è che è <u>la più debole di tutte</u> e quindi <u>unifica</u> tutte le convergenze note.

<u>ES</u> $u_j \to u$ in $L^p$ cioè $\|u_j - u\|_{L^p} \to 0$.
Allora $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'$: per HÖLDER.

$$|u_j(\varphi) - u(\varphi)| = \left|\int (u_j - u)\varphi\right| \le \|u_j - u\|_{L^p} \cdot \|\varphi\|_{L^{p'}}$$

<u>ES</u> $u_j, u \in C(\mathbb{R}^n)$, $u_j \to u$ uniformemente sui compatti $\Rightarrow u_j \to u$ in $\mathcal{D}'$ [facile].

# DISTRIBUZIONI di ORDINE FINITO

Nella def. alternativa di distribuzione,

$$|T(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^\infty}, \quad \text{supp}\,\varphi \subseteq K$$

le costanti $C$ e $m$ dipendono dal compatto $K$. Se è possibile trovare un grado $m$ INDIPENDENTE da $K$, si dice che $T$ è <u>di ordine finito</u>, e il minimo $m$ è l'<u>ORDINE di</u> $T$.

Ad esempio la <u>$\delta$ ha ordine 0</u> perché

$$|\delta(\varphi)| = |\varphi(0)| \le \|\varphi\|_{L^\infty} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Una osservazione interessante è la seguente: <u>le distribuzioni di ordine 0 su $\Omega$ sono tutte e sole le misure di RADON su $\Omega$</u> [che poi, per un teorema di Riesz, sono appunto i funzionali continui da $C_c(\Omega) \to \mathbb{C}$; lasciamo perdere i dettagli].

**PROP** Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è POSITIVA, ossia $u(\varphi) \ge 0$ per ogni $\varphi \ge 0$, allora $u$ HA ORDINE 0 (è una misura)

[Dato $K \subset\subset \Omega$ cerchiamo $C$ tale che $|u(\varphi)| \le C\|\varphi\|_{L^\infty}$ $\forall \varphi$ con supporto $\subseteq K$. Sia $\chi$ una f. test che vale 1 su $K$. Se $\varphi$ è a valori reali,

$$\chi \cdot \|\varphi\|_{L^\infty} \pm \varphi \ge 0 \Rightarrow u(\chi)\cdot\|\varphi\|_{L^\infty} \pm u(\varphi) \ge 0$$

e quindi

$$|u(\varphi)| \le u(\chi)\,\|\varphi\|_{L^\infty} \quad (C = u(\chi)).$$

Se $\varphi$ è a valori complessi, basta applicare il ragionamento precedente a $\operatorname{Re}\varphi$ e $\operatorname{Im}\varphi$ ].

# $\boxed{\text{DERIVAZIONE in } \mathcal{D}'(\Omega)}$

Ora possiamo fare sul serio e portare a termine la definizione iniziata con la derivata deboli. Basta riscrivere l'identità $\int f'\varphi = -\int f\varphi'$ SENZA USARE GLI INTEGRALI:

<u>DEF</u> Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La <u>derivata parziale</u> $\partial_j u$ è la distribuzione

$$\boxed{\partial_j u(\varphi) := -u(\partial_j \varphi)}$$

[è lineare; è continua perché se $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D} \Rightarrow$
$\partial_j \varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D} \Rightarrow u(\partial_j \varphi_k) \to 0$].

In generale, se $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\boxed{D^\alpha u(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi)}$$

<u>OSS</u> Ad esempio, $\boxed{H' = \delta}$

<u>OSS</u> Notare che TUTTE LE DISTRIBUZIONI si possono DERIVARE QUANTE VOLTE SI VUOLE!

<u>PROPRIETÀ</u>

① Se $f \in C^1$, la derivata di $f$ in senso classico e nel senso delle distribuzioni COINCIDONO. In formule: $T_{\partial_j f} = \partial_j T_f$

$$\left[ T_{\partial_j f}(\varphi) = \int \partial_j f \cdot \varphi = -\int f \cdot \partial_j \varphi = (\partial_j T_f)(\varphi) \right]$$

② Se $f$ ha un salto, ad esempio $f = H$, la derivata quasi ovunque (classica) è DIVERSA da quella distribuzionale (vedi $H' = \delta$).

# ESEMPI / ESERCIZI

① QUALUNQUE $f \in L^1_{loc}$ si può derivare in $\mathcal{D}'$. Anche se il risultato può essere un po' strano. Ad esempio

$$f = \log|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

La derivata di $f$ è la distribuzione $\boxed{V.P.\frac{1}{x}}$ definita da

$$\boxed{V.P.\frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx}$$

[DIMOSTRATELO! si comincia così:

$$f'(\varphi) := \int -\log|x| \cdot \varphi' =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} -\log|x| \cdot \varphi'$$

Calcolare $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \log|x| \cdot \varphi'$ e $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x| \cdot \varphi'$ separatamente, integrando per parti, e poi rimettere tutto insieme].

Notare che $\frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (quindi $V.P.\frac{1}{x} \neq \frac{1}{x}$).

② Se $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R})$ esiste sempre $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$, quindi $V.P.\frac{1}{x}$ è ben definita.

[Se $\varphi$ è PARI ($\varphi(x) = \varphi(-x)$) allora $VP\frac{1}{x}(\varphi) = 0$. Dimostrare poi che ogni $\varphi \in C^1_c$ si può scrivere come $\varphi = \varphi(0)\cdot\chi + x\cdot\psi(x)$ dove $\chi, \psi \in C_c$ e $\chi$ è pari].

3) Se $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ allora

$$\boxed{D^\alpha u_j \to D^\alpha u \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n}.$$

Ossia, le successioni convergenti di $\mathcal{D}'$ si possono derivare termine a termine quante volte si vuole, e si ottengono sempre succ. convergenti;

[basta applicare le definizioni]

4) $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ è la delta di Dirac.

Più in generale si può definire $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)}$$

$\delta_{x_0}$ è una distribuzione? di che ordine?

5) È vero che $e^{x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $e^{-1/x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$, $|x|^{-k} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $|x|^{-k} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ?

6) Siano $x_j$ dei punti di $\Omega$ e supponiamo che $x_j \to p \in \partial\Omega$. Mostrare che (i) $T := \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{x_j}$ è una distr. su $\Omega$, di ordine 0. (ii) Sapreste costruire una distribuzione di ordine $\infty$?

<u>ESERC</u> Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Allora $\varphi$ si scrive come somma $\varphi = \varphi_P + \varphi_D$ dove $\varphi_P, \varphi_D \in \mathcal{D}$, $\varphi_P$ è PARI ($\varphi_P(x) = \varphi_P(-x)$) e $\varphi_D$ è DISPARI ($\varphi_D(-x) = -\varphi_D(x)$). POI dimostrare che $\varphi_D$ si scrive come $\varphi_D = x\psi_P$ dove $\psi_P$ è PARI. Infine, $\text{V.P.}\frac{1}{x}(\varphi) = \psi_P(0)$.

$$\left[ \varphi(x) = \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} + \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2}, \quad \psi_P = \ldots\ldots \right]$$

# LA MOLTIPLICAZIONE $C^\infty \cdot \mathcal{D}'$

Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $a(x) \in C^\infty(\Omega)$, ovviamente si può calcolare $a \cdot u \in L^1_{loc}$, e vale banalmente

$$\int_\Omega (au)\cdot\varphi = \int_\Omega u\cdot(a\varphi)$$

**DEF** Il prodotto di $a \in C^\infty(\Omega)$ per $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si definisce come $\boxed{au(\varphi) = u(a\varphi)}$

(Notare che la def. ha senso perché $a\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.)

**ESERCIZIO**

1. Quanto fa $x\cdot\delta$ ? e $a(x)\cdot\delta$ ? (se $a \in C^\infty$)
2. Sia $u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$. Dimostrare che $au_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} au$ $\forall a \in C^\infty(\Omega)$ –

OSS Un neo della teoria: NON SI PUÒ DEFINIRE il prodotto di $u, v \in \mathcal{D}'$ qualunque in modo sensato, cioè in modo da ottenere un prodotto che sia ASSOCIATIVO e COMMUTATIVO.

ESEMPIO: $\delta\cdot VP\frac{1}{x} = ?$ Se si potesse definire e fosse assoc. e commut., si avrebbe:

$$(x\cdot\delta)\cdot VP\frac{1}{x} = \delta\cdot\left(x\cdot VP\frac{1}{x}\right)$$

Ma $x\cdot\delta = 0$ (controllare) mentre $x\cdot VP\frac{1}{x} = 1$ (controllare) quindi

$$0\cdot VP\frac{1}{x} = \delta\cdot 1 \quad \text{(controllare).}$$

cioè $0 = 1$ !

<u>OSS</u> Vale la regola di LEIBNITZ?

Ad esempio, su $\mathbb{R}$: se $a \in C^\infty$, $u \in \mathcal{D}'$

$$\boxed{(au)' = a'u + au'}$$ è vera.

[controlliamo:

$$(au)'(\varphi) = -(au)(\varphi') = -u(a\varphi')$$
$$= -u((a\varphi)' - a'\varphi)$$
$$= -u((a\varphi)') + u(a'\varphi)$$
$$= u'(a\varphi) + u(a'\varphi)$$
$$= au'(\varphi) + a'u(\varphi)]$$

<u>OSS</u> Che vuol dire che $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è uguale a $0$?

Vuol dire

$$u(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $u(\varphi) = 0 \ \forall \varphi \Rightarrow u = 0$ q.o.

[perché $\int_\Omega u\varphi = 0 \quad \forall \varphi$ test $\Rightarrow u = 0$ q.o.]

<u>ES</u> Se $a \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$a > 0$ su $\Omega$, $au = 0 \Rightarrow u = 0$.

# EQ. DIFFERENZIALI in $\mathcal{D}'$

Tutto si basa sulla prop. seguente:

**PROP** Se $u \in \mathcal{D}'(]a,b[)$ ha derivata nulla, allora $u$ è COSTANTE

OSS Attenzione! che vuol dire?

$u' = 0$ vuol dire $u'(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

$u = C$ costante vuol dire $u(\varphi) = \int C\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

[Fissiamo $\chi_0 \in C_c^\infty(]a,b[)$ tale che $\int \chi_0 = 1$.
Allora se $\varphi$ è una f. test, anche $\varphi - \chi_0 \cdot \int \varphi$ è una f. test, inoltre ha integrale nullo, quindi la sua primitiva $\psi$ è ancora una f. test (perché?)
CONCLUSIONE: dato che $\psi' = \varphi - \chi_0 \int \varphi$,

$$u(\varphi - \chi_0 \cdot \int \varphi) = u(\psi') = -u'(\psi) = 0$$

per ipotesi, e quindi

$$u(\varphi) = u(\chi_0) \cdot \int \varphi$$

cioè $u \equiv C \equiv u(\chi_0)$ ].

OSS Se $\varphi$ è una f. test e $\int \varphi = 0$, allora la sua primitiva $\psi = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)dx$ è $C^\infty$ e si annulla per $t$ grande, quindi $\psi$ è ancora una f. test.

OSS A questo punto è facile risolvere il problema: TROVARE TUTTE le $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tali che

$$\boxed{u' + a(x)u = 0}$$

dove $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ è fissata.

Basta moltiplicare per $e^{\int a}$ ($\int a$ una qualunque primitiva di $a$):

$$u' + a(x)u = 0 \iff e^{\int a}(u' + a(x)u) = 0$$

(perché $e^{\int a} > 0$)

$$\iff (e^{\int a} u)' = 0 \quad \text{(Leibnitz)}$$

$$\iff e^{\int a} u = \text{costante}$$

$$\iff u = c \cdot e^{-\int a}.$$

Quindi tutte le soluzioni distribuzioni di $u' + a(x)u = 0$ sono espresse dalla formula $c\,e^{-\int a}$; lavorare in $\mathcal{D}'$ non aggiunge altre soluzioni a quelle già note (che sono di classe $C^\infty$).

## SUPPORTO e LOCALIZZAZIONE

<u>DEF</u> Se $\Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$, $\omega$ aperto $\subseteq \Omega$, e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la RESTRIZIONE o LOCALIZZAZIONE $u_{|\omega} \in \mathcal{D}'(\omega)$ è definita semplicemente come

$$u_{|\omega}(\varphi) = u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

<u>DEF</u> Il <u>SUPPORTO</u> di $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è il complementare dell'unione di tutti gli aperti $\omega \subseteq \Omega$ tali che $u_{|\omega} = 0$ [se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ riotteniamo $\operatorname{supp} u$].

<u>ESEMPIO</u> $\boxed{\operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}}$ $\boxed{\operatorname{supp} D^\alpha \delta = \{0\}}$
e, come già detto, $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

<u>OSS</u> Ricordiamo che $\delta(\varphi) = \varphi(0)$,
$$D^\alpha \delta(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \delta(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0).$$
Tutte queste distribuzioni hanno supporto uguale a $\{0\}$. Sono praticamente le uniche con queste proprietà!

<u>PROP</u> Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con $\operatorname{supp} u = \{0\}$. Allora esistono $m \geq 0$ e $c_\alpha$ costanti tali che $u = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \cdot D^\alpha \delta$, cioè $u$ è combinaz. lineare finita di derivate della $\delta$.

~~[Sia $\varphi$ una funzione test, e sia $\chi$ un'altra f. test che vale $1$ per $|x| \leq 1$ e $0$ per $|x| \geq 2$. (Facciamo la dim. solo nel caso $n = 1$ cioè $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, il caso generale è praticam. identico solo più complicato da scrivere).~~

[Facciamo la dimostrazione solo per $n=1$ cioè su $\mathbb{R}$, il caso $n \geq 1$ è uguale, solo più complicato da scrivere.

Se $\varphi$ e $\chi$ sono due funzioni test fissate, valgono le seguenti disuguaglianze: $\forall x$,

$$|x^{m+1}\varphi(x)\cdot\chi(x/\varepsilon)| \leq C\,\varepsilon^{m+1}$$
$$|(x^{m+1}\varphi(x)\cdot\chi(x/\varepsilon))'| \leq C\,\varepsilon^{m}$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$|(x^{m+1}\cdot\varphi(x)\cdot\chi(x/\varepsilon))^{(m)}| \leq C\,\varepsilon$$

[la prima perché il prodotto fa zero se $x/\varepsilon \notin \operatorname{supp}\chi$; se $\operatorname{supp}\chi \subseteq [-M,M]$ questo vuol dire che $|x| \geq \varepsilon M \Rightarrow \chi(x/\varepsilon)=0$ e quindi $|x^{m+1}\varphi\chi(x/\varepsilon)| \leq \varepsilon^{m+1}\cdot M^{m+1}\cdot\|\varphi\|_{L^\infty}\|\chi\|_{L^\infty}$.
Le altre sono uguali, si deriva e si rifà lo stesso ragionamento per ogni termine].

Ora osserviamo che nella proprietà di $u \in \mathcal{D}'$

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{j\leq m} \|\partial^j\varphi\|_{L^\infty} \qquad (*)$$

le costanti $m$, $C$ si possono rendere INDIPENDENTI dal supporto di $\varphi$ perché $\operatorname{supp} u$ è $\{0\}$. Quindi fissiamo $C$ e $m$ nella (*)

Infine, notiamo che se $\chi$ è una fissata funzione test che vale $1$ in un intorno di $0$, si ha $\forall\varepsilon$: $u(\varphi) = u(\varphi\cdot\chi(\frac{x}{\varepsilon})) + u(\varphi\cdot(1-\chi(\frac{x}{\varepsilon})))$ ma il 2° termine fa $0$ perché $\operatorname{supp} u = \{0\}$, quindi

$$u(\varphi) = u(\varphi\cdot\chi(\tfrac{x}{\varepsilon})).$$

CONCLUSIONE: applichiamo la (*) e otteniamo

$$|u(x^{m+1}\varphi)| \equiv |u(x^{m+1}\varphi\,\chi(x/\varepsilon))|$$
$$\leq C \sum_{j\leq m} \| (x^{m+1}\varphi\,\chi(x/\varepsilon))^{(j)}\|_{L^\infty}$$
$$\leq C'(\varepsilon^{m+1}+\varepsilon^{m}+\ldots+\varepsilon) \leq C''\varepsilon$$

e mandando $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$\underline{u(x^{m+1}\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \text{ test}}.$$

Ma allora, se $\varphi$ è una f. test, scriviamo il suo pol. di TAYLOR in 0

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} x^j + x^{m+1}\psi(x)$$

($\psi$ è il resto e ovviamente $\psi \in C^\infty$)

$\Rightarrow$

$$u(\varphi) = u(\chi\cdot\varphi) = \sum_{j=0}^{m} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} u(x^j\chi) + \underbrace{\cancel{u(x^{m+1}\psi\chi)}}_{\displaystyle =0}$$

dove l'ultimo termine fa 0 per quanto già visto, e gli altri sono proprio della forma $c_j\,\delta^{(j)}(\varphi)$ ]

<u>DEF</u> $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ha <u>SUPPORTO COMPATTO</u> se supp $u$ è compatto $\subseteq \Omega$. Notare che se $\chi$ è una funzione test che vale 1 su supp $u$ possiamo scrivere

$$\circledast \qquad u(\varphi) \equiv u(\chi\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

QUINDI se $u$ ha supporto compatto possiamo calcolare $u(\varphi)$ per qualunque $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ !

Basta usare $\circledast$ come definizione.

La classe delle $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a supporto compatto si indica anche con $\mathcal{E}'(\Omega)$.

<u>OSS</u> $u$ ha supp. compatto $\Rightarrow u$ ha ordine finito (perché?).

OSS Supponiamo di avere una funzione $F(x,y)$ di due variabili, $C^\infty$, e di sapere che

$\forall y$, $F(x,y)$ è a supp. COMPATTO in $x$

Allora se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ possiamo calcolare

$u(F(\cdot,y))$ per ogni $y$ fissato

e quindi otteniamo una funzione $g(y)$:

$$g : y \longmapsto u(F(\cdot,y))$$

Allora si ha:

$$\boxed{\text{LA FUNZIONE } g(y) = u(F(\cdot,y)) \text{ è } C^\infty!}$$

[è continua perché se $y_n \to y_0 \Rightarrow F(x,y_n) \to F(x,y_0)$ in $\mathcal{D}$ e quindi $u(F(x,y_n)) \to u(F(x,y_0))$;

è derivabile perché

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = u\left(\frac{F(x,y+h)-F(x,y)}{h}\right)$$

e la frazione dentro $u$ converge a $\frac{\partial F}{\partial y}$ in $\mathcal{D}$ quando $h \to 0$, quindi $g$ è derivabile e

$$g'(y) = u\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

ma allora, come prima, $g'$ è anche continua, e così via. Si ha $D^\alpha_y g = u(D^\alpha_y F(\cdot,y))$ ].

Ovviamente lo stesso discorso vale per $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y)$.

OSS Supponiamo di avere $F(x,y) \in C^\infty_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.
Chiaramente $x \longmapsto \int F(x,y)\,dy$ è in $C^\infty_c(\mathbb{R})$
Allora, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, vale la formula

$$\boxed{u\left(\int F(x,y)\,dy\right) = \int u(F(\cdot,y))\,dy}$$

[basta osservare che l'integrale di Riemann

$\int F(x,y)\,dy$ è il limite delle somme parziali
$$\sum_{j=1}^{N} F(x,y_j)\cdot(y_j-y_{j-1})$$
con $a \leq y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_N = b$, dove l'intervallo $[a,b]$ fissato è tale che $\operatorname{supp} F \subseteq [a,b]\times[a,b]$.
Ora, la somma parziale è una funzione test in $x$ e converge in $\mathcal{D}$ a $\int F(x,y)\,dy$.
Quindi se $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
$$u\left(\sum F(x,y_j)\cdot(y_j-y_{j-1})\right) \longrightarrow u\left(\int F(x,y)\,dy\right)$$
Ma d'altra parte
$$u\left(\sum F(x,y_j)\cdot(y_j-y_{j-1})\right) = \sum u(F(x,y_j))\cdot(y_j-y_{j-1})$$
e questa è la somma parziale dell'integrale $\int u(F(\cdot,y))\,dy$, quindi quando $N\to\infty$ si ha anche $u\left(\sum F(x,y_j)\cdot(y_j-y_{j-1})\right) \longrightarrow \int u(F(\cdot,y))\,dy$ $\Big]$.

La formula vale anche se $F\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

OSS le precedenti dimostrazioni non sono particolarmente importanti, ma bisogna ricordare questi due fatti:
$$\boxed{u(F(\cdot,y)) \text{ è } C^\infty \text{ in } y}$$
(se $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $F\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ a supp. comp. in $x$)
e poi
$$\boxed{u\left(\int F(x,y)\,dy\right) = \int u(F(\cdot,y))\,dy}$$
(se $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $F\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$).

# $\boxed{\text{CONVOLUZIONE in } \mathcal{D}'}$

<u>OSS</u> Se $u, \psi, \varphi \in \mathcal{D}$, possiamo scrivere

$$\int (u * \psi) \cdot \varphi \, dx = \int u(x) \left[ \int \psi(y-x) \varphi(y) dy \right] dx$$

Notare che l'oggetto fra parentesi NON È la convoluzione $\psi * \varphi$ (dovrebbe essere $\psi(y-x)$)

Però se usiamo la notazione

$$\check{\psi}(y) = \psi(-y)$$

otteniamo la formula

$$\int (u * \psi) \varphi \, dx = \int u \cdot (\check{\psi} * \varphi) \, dx$$

Questo ispira la definizione

<u>DEF</u> Se $u \in \mathcal{D}'$, $\psi \in \mathcal{D}$, la <u>CONVOLUZIONE</u> $u * \psi$ è la <u>distribuzione</u>

$$\boxed{u * \psi(\varphi) := u(\check{\psi} * \varphi)}$$

[Ma è davvero una distribuzione? controlliamo:

1) $\psi, \varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \check{\psi} * \varphi \in \mathcal{D}$ quindi $u(\check{\psi} * \varphi)$ si può calcolare
2) $u * \psi$ è lineare in $\varphi$
3) Se $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D} \Rightarrow \check{\psi} * \varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D}$ (perché?) e quindi $u * \psi(\varphi_j) \to 0$, cioè $u * \psi \in \mathcal{D}'$ ].

## $\boxed{\text{PROPRIETÀ}}$ <u>$u \in \mathcal{D}'$, $\psi \in \mathcal{D}$</u>

1 <u>$u * \psi$ è una FUNZIONE $C^\infty$</u>, e precisamente

$$\boxed{u * \psi \equiv u(\psi(x - \cdot))}$$

[se $\varphi \in \mathcal{D}$, $u * \psi(\varphi) = u(\check{\psi} * \varphi) =$

$$= u\left(\int \psi(y-x) \varphi(y) dy\right) = \int u(\psi(y - \cdot)) \varphi(y) dy$$

quindi vale la formula, e sappiamo già che $u(\psi(x - \cdot))$ è $C^\infty$ ].

QUINDI: $\boxed{\mathcal{D}' * \mathcal{D} \subseteq C^\infty}$

(2) Data $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si può definire $\forall \varepsilon > 0$ la REGOLARIZZATA $\boxed{u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u}$.

$u_\varepsilon$ è $C^\infty$ e $u_\varepsilon \to u$ in $\mathcal{D}'$.

[$u_\varepsilon(\varphi) = \rho_\varepsilon * u(\varphi) = u(\check{\rho}_\varepsilon * \varphi)$. Dato che $\check{\rho}_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ per $\varepsilon \to 0$ ne segue $u_\varepsilon(\varphi) \to u(\varphi) \Rightarrow u_\varepsilon \to u$ in $\mathcal{D}'$].

OSS Se $\rho_\varepsilon$ è PARI $\Rightarrow \check{\rho}_\varepsilon = \rho_\varepsilon \Rightarrow \boxed{u_\varepsilon(\varphi) = u(\varphi_\varepsilon)}$.

(3) Se $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'$, allora $\forall \psi$ test $u_j * \psi \to u * \psi$ in $\mathcal{D}'$

[$u_j * \psi(\varphi) = u_j(\check{\psi} * \varphi) \to u(\check{\psi} * \varphi) = u * \psi(\varphi)$]

(4) Se $u \in \mathcal{D}'$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, allora

$$(u * \psi) * \varphi = u * (\psi * \varphi)$$

cioè il prodotto $*$ è ancora ASSOCIATIVO

[$\forall \varepsilon$, $(u_\varepsilon * \psi) * \varphi = u_\varepsilon * (\psi * \varphi)$. Per il punto (3) possiamo passare al limite in $\mathcal{D}'$ e otteniamo la tesi] -

(5) $\boxed{D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * (D^\alpha \varphi)}$.

($\forall \alpha$, $\forall u \in \mathcal{D}'$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$) -

[tutto vero se mettiamo $u_\varepsilon$ al posto di $u$, e poi basta passare al limite].

(6) $\boxed{\operatorname{supp}(u * \varphi) \subseteq \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \varphi}$ $\forall u \in \mathcal{D}', \varphi \in \mathcal{D}$.

[notare che chiuso + compatto = chiuso -
DIM. per esercizio!]

OSS Più in generale si può definire $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$ $(\subseteq \mathcal{D}')$.

# DISTRIBUZIONI TEMPERATE

Uno degli impieghi migliori della teoria delle distribuzioni è per estendere senza sforzo la trasformata di Fourier a classi molto vaste di funzioni (e distribuzioni). Prepariamo un po' di strumenti.

**DEF** $\mathcal{S}$ è lo spazio delle funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che $\boxed{x^\alpha D^\beta f \in L^\infty}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

Si dicono FUNZIONI RAPIDAMENTE DECRESC. (e $\mathcal{S}$ si chiama SPAZIO di SCHWARTZ).

PROPRIETÀ

(1) $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$, ma $(1+|x|^2)^{-N} \notin \mathcal{S}$

[VERIFICARE!]

(2) $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$ [OVVIO]

(3) Se definiamo per $m = 0, 1, 2, \dots$

$$p_m(f) := \sum_{|\beta|, |\alpha| \le m} \| x^\alpha D^\beta f \|_{L^\infty}$$

allora $p_m(f) < \infty$ $\forall m$ e $\forall f \in \mathcal{S}$.

ANZI, se $f \in C^\infty$ e $p_m(f) < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{S}$.

[FACILE...]

(4) Si può definire una convergenza su $\mathcal{S}$:

$$f_j \to 0 \text{ in } \mathcal{S} :\Leftrightarrow p_m(f_j) \to 0 \quad \forall m.$$

Allora, se $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D} \Rightarrow \varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$

[ricordare che $\exists K$ compatto con $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ $\forall j$, quindi ...]

**DEF** Una distribuzione TEMPERATA è un funzionale LINEARE $u : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, CONTINUO nel senso che

se $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{S}$, allora $u(\varphi_j) \to 0$

Un modo equivalente di definire una distr. temperata è: $u$ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}$ tale che esistono due costanti $C, m$ per cui

$$|u(\varphi)| \leq C\, p_m(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Lo spazio delle DISTR. TEMPERATE si indica $\mathcal{S}'$!

OSS Perché le chiamiamo DISTRIBUZIONI? PERCHÉ in effetti $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{D}'$! o meglio, ogni $u \in \mathcal{S}'$ si può vedere come un elemento di $\mathcal{D}'$. INFATTI: se $u \in \mathcal{S}'$

1) $u(\varphi)$ si può calcolare $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$!)
2) $u$ è LINEARE in $\varphi$
3) se $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D} \Rightarrow \varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S} \Rightarrow$
$\Rightarrow u(\varphi_j) \to 0 \Rightarrow u \in \mathcal{D}'$.

ESEMPI

1) $e^x \notin \mathcal{S}'$ perché CRESCE TROPPO all'$\infty$

[Fissiamo $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi \geq 0$ ($\varphi \not\equiv 0$), TRASLIAMOLA $\varphi_j(x) = \varphi(x-j)$, e osserviamo che

$$p_m(\varphi_j) \leq C\, j^m \qquad \forall j \geq 1$$

per una certa $C$ (perché?)

Invece $\int e^x \varphi_j \, dx \geq c\, e^j$ per un'altra $c$]

(2) $\boxed{L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}' \quad \forall\, 1 \le p \le \infty}$

[cioè se $f \in L^p \Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'$.

Basta osservare che $\left|\int f\varphi\right| \le \|f\|_{L^p} \cdot \|\varphi\|_{L^{p'}}$ per HÖLDER. Inoltre

$$\|\varphi\|_{L^{p'}} = \|(1+|x|)^N \varphi \cdot (1+|x|)^{-N}\|_{L^{p'}}$$
$$\le p_N(\varphi) \cdot \|(1+|x|)^{-N}\|_{L^{p'}}$$

e se $N$ è abbastanza grande l'ultima norma è $< \infty$ $\Rightarrow |T_f(\varphi)| \le C\, p_N(\varphi)$ ].

OSS La convergenza in $\mathcal{S}'$ è la stessa che in $\mathcal{D}'$:

$$\boxed{u_j, u \in \mathcal{S}', \quad u_j \to u \text{ in } \mathcal{S}' \iff u_j(\varphi) \to u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.}$$

OSS Notare che $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{D}'$ (ma non ci soffermiamo...).

OSS Usando $\mathcal{S}'$ sarà possibile estendere la TRASFORMATA di FOURIER a tutte le funzioni $L^p$ e oltre (a tutte le DISTRIBUZIONI di $\mathcal{S}'$) in modo RAPIDO e INDOLORE

## DUE PROBLEMI TECNICI

Dovremo spesso fare le operazioni seguenti:

### 1) INTEGRAZIONE per PARTI

Se $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, è vero che

$$\boxed{\int f' g \, dx = -\int f g' \, dx} \quad ?$$

Naturalmente bisogna supporre che

$$f' g \in L^1, \quad f g' \in L^1$$

per scrivere gli integrali. Inoltre se integriamo $(fg)' = f'g + fg'$ da $-M$ a $M$ abbiamo

$$\int_{-M}^{M} f' g = -\int_{-M}^{M} f g' + (fg)\Big|_{-M}^{M}$$

Allora vediamo che basta fare l'ipotesi:

$$\boxed{(fg) \to 0 \text{ per } x \to +\infty, \text{ e } x \to -\infty}$$

per ottenere (passando al limite $M \to +\infty$) che la formula è vera.

### 2) DERIVAZIONE sotto INTEGRALE

Se $f(x, \xi) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, inoltre $\forall \xi \in [a, b]$ le funzioni $f(\cdot, \xi)$ e $D_\xi f(\cdot, \xi)$ sono in $L^1(\mathbb{R})$, è vero che (per $\xi \in [a, b]$)

$$\boxed{D_\xi \int f(x, \xi) \, dx = \int D_\xi f(x, \xi) \, d\xi} \quad ?$$

Basta fare l'ipotesi che $D_\xi f$ sia $L^1$ nel senso

$$\boxed{D_\xi f \in L^1(\mathbb{R} \times [a, b])}$$

e allora la formula è vera

[Sia $g = \int f(x, \xi) \, dx$, $h(\xi) = \int D_\xi f(x, \xi) \, dx$.

Allora $\forall \alpha, \beta \in (a, b)$ per FUBINI

$$\int_\alpha^\beta h(\xi) \, d\xi = \int_\alpha^\beta \int D_\xi f \, dx \, d\xi = \int \int_\alpha^\beta = \int f(x, \alpha) - f(x, \beta)$$

cioè $\int_\alpha^\beta h(\xi) \, d\xi = g(\beta) - g(\alpha) \Rightarrow g' = h$].

# La TRASFORMATA di FOURIER

<u>DEF</u> Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la sua <u>TRASF. di FOURIER</u> è

$$\boxed{\hat{f}(\xi) := \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx}$$

(dove $x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\cdot\xi_n$) - L'operatore $f \mapsto \hat{f}$ si indica anche $\mathcal{F}$, quindi $\hat{f} = \mathcal{F}f$.

## PROPRIETÀ ELEMENTARI

① $\mathcal{F}$ è un operatore limitato: $L^1 \to L^\infty$ e $\boxed{\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}}$
[facile: $|\hat{f}| \le \int |f|$]

② Se $f \in C^1$, con $f \in L^1$ e $x\cdot f(x) \in L^1$, allora

$$\boxed{D_\xi \hat{f} = \mathcal{F}(i^{-1} x f) \quad , \quad \xi \hat{f} = \mathcal{F}(i^{-1} D_x f)}$$

cioè, la <u>moltiplicazione per $x$</u> si <u>trasforma</u> <u>nella derivata</u> e <u>viceversa</u>.

$$\Big[\ \partial_{\xi_j} \int e^{-ix\cdot\xi_j} f(x)dx = \int \partial_{\xi_j}(e^{-ix\cdot\xi}) f(x)\,dx$$
$$= \int (-ix_j e^{-ix\cdot\xi}) f(x)\,dx \quad \Rightarrow \text{la prima}.$$
$$\xi_j \int e^{-ix\cdot\xi_j} f(x)\,dx = \int \partial_{x_j}(e^{-ix\cdot\xi})\cdot(i) f(x)\,dx$$
$$= (\text{per parti}) \int e^{-ix\cdot\xi}(-i)\,\partial_{x_j} f\,dx \Rightarrow \text{la } 2^a\ \Big].$$

③ Per induzione,

$$\boxed{D^\alpha \hat{f} = \mathcal{F}(i^{-|\alpha|} x^\alpha f), \quad \xi^\alpha \hat{f} = \mathcal{F}(i^{-|\alpha|} D_x^\alpha f)}$$

sotto opportune ipotesi su $f$. Ad esempio le formule sono vere se $\boxed{f \in \mathcal{S}}$ la classe di Schwartz delle funzioni rapidamente decresc.
[facile]

④ ANZI vale la proprietà $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$
cioè $\boxed{\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}}$

[è facile ma è un po' lungo, omettiamo la dim.]

OSS Notare che $\mathcal{S}$ è la minima classe di funzioni limitate che è STABILE per le operazioni di DERIVATA ($\Rightarrow$ sono $C^\infty$) e MOLTIPLICAZIONE per POTENZE di $x$ ($\Rightarrow$ sono rapidamente decrescenti). Quindi è naturale che $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ dato che $\mathcal{F}$ non fa altro che scambiare le due operazioni.

(5) Fourier e RISCALATURE $(S_\lambda f)(x) := f(\lambda x)$

Vale la formula ($\lambda > 0$)

$$\boxed{\widehat{f(\lambda x)} = \lambda^{-n} \hat{f}(\xi/\lambda), \text{ cioè } \mathcal{F}(S_\lambda f) = \lambda^{-n} S_{1/\lambda} \hat{f}}$$

$$\left[\int e^{-ix\cdot\xi} f(\lambda x)\, dx = \int e^{-iy\cdot\xi/\lambda} f(y)\, dy \cdot \lambda^{-n}, \quad y = \lambda x\right]$$

(6) Fourier e TRASLAZIONI $(T_h f)(x) := f(x+h)$

Vale la formula ($h \in \mathbb{R}^n$)

$$\boxed{\widehat{f(x+h)} = e^{ih\cdot\xi} \hat{f}(\xi), \text{ cioè } \mathcal{F}(T_h f) = e^{i\xi\cdot h} \hat{f}}$$

Notare che le traslazioni diventano OSCILLAZIONI

$$\left[\int e^{-ix\cdot\xi} f(x+h)\, dx = \int e^{-i(y-h)\cdot\xi} f(y)\, dy, \quad y = x+h\right].$$

(7) Fourier e CAMB. di VAR (OMOTETIA) $f(Ax)$, dove $A$ è una matrice $n\times n$ invertibile. Vale la f.

$$\boxed{\widehat{f(Ax)} = |\det A^{-1}| \cdot \hat{f}((A^{-1})^T \xi)}$$

$\Big[ \int e^{-ix\cdot\xi} f(Ax)\, dx$, pongo $y = Ax \Rightarrow x = A^{-1} y$

e $x \cdot \xi = (A^{-1}y)\cdot \xi = y \cdot ((A^{-1})^T \xi)$

$\Rightarrow \int e^{-iy\cdot((A^{-1})^T\xi)} f(y)\, d(A^{-1}y) =$

$= \int e^{-iy((A^{-1})^T\xi)} f(y)\, dy \cdot |\det A^{-1}| \Big]$.

(8) Se $A$ è una matrice $n \times n$ ortogonale (una ROTAZIONE) si ha $|\det A^{-1}| = 1$, $(A^{-1})^T = A$, quindi $\boxed{A \in O(n)}$

$$\boxed{\widehat{f(Ax)} = \hat{f}(A\xi) \quad \text{se } A \text{ ortogonale}}$$

In altri termini, $\mathcal{F}$ è INVARIANTE per "ROTAZIONI".

(9) Un modo di definire una funzione RADIALE è dire che dipende solo da $|x|$, cioè esiste $\varphi$:

$$f(x) = \varphi(|x|).$$

Un modo equivalente è dire che $f$ è invariante per "rotazioni":

$$f \text{ RADIALE} \iff f(Ax) = f(x) \quad \forall A \in O(n)$$

Dato che vale la proprietà (8), vediamo subito che

$$\boxed{f \text{ RADIALE} \iff \hat{f} \text{ RADIALE}}$$

Oss Gli elementi di $O(n)$ possono avere determinante $\pm 1$; di solito le ROTAZIONI propriamente dette sono le matrici con determinante $+1$, le altre sono combinazione di una rotazione e una riflessione. (Non stiamo a sottilizzare ...).

(10) Che succede se trasformiamo $f(-x)$, cioè applichiamo prima una RIFLESSIONE rispetto a 0? Abbiamo $(y = -x)$

$$\int e^{-ix\cdot\xi} f(-x)\,dx = \int e^{iy\cdot\xi} f(y)\,dy$$

che volendo si può scrivere

$$\int e^{-ix\cdot\xi} f(-x)\,dx = \overline{\int e^{-iy\cdot\xi}\, \overline{f(y)}\,dy}$$

## ESEMPIO FONDAMENTALE: le GAUSSIANE

Le funzioni del tipo $\boxed{e^{-a|x|^2}, \ a>0}$ sono di fondamentale importanza poiché sono "invarianti" per $\mathcal{F}$:

$$\boxed{\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}}$$

In particolare la gaussiana per $a = 1/2$ va in se stessa: $\mathcal{F}\left(e^{-|x|^2/2}\right) = (2\pi)^{n/2} e^{-|\xi|^2/2}$.

[Usando il riscalamento $S_{\sqrt{a}}$, basta dimostrare la formula per $a=1$.
Inoltre $\int e^{-ix\cdot\xi} e^{-|x|^2} dx = \left(\int e^{-ix_1\xi_1} e^{-x_1^2}\right)\cdots\left(\quad\right)$
e quindi basta dimostrare la formula in dimensione $n=1$.
Ci siamo ridotti a dimostrare

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}$$

Notiamo che $\hat{f} \in \mathcal{S}$ e che

$$\hat{f}'(\xi) = \int (-ix) e^{-ix\xi} e^{-x^2} dx$$
$$= \int \frac{i}{2} e^{-ix\xi} D_x(e^{-x^2})\, dx \quad \text{(per parti)}$$
$$= \int \left(\frac{i}{2}\right)(-1) D_x(e^{-ix\xi})\, dx = \frac{\xi}{2}\hat{f}(\xi)$$

cioè $\hat{f}' = \frac{\xi}{2}\hat{f} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = C e^{\xi^2/4}$
Ma $\hat{f}(0) = C = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \Rightarrow$ la tesi ].

# FORMULA di INVERSIONE di FOURIER



Ha due conseguenze importanti:

1. $\mathcal{F}$ è INIETTIVA (anzi $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è BIIETTIVA)
2. $\mathcal{F}^{-1}$ si scrive con una formula molto simile a $\mathcal{F}$.

**TEOR** Sia $f \in L^1$ tale che $\hat{f} \in L^1$. Allora per q.o. $x$
$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

[Abbiamo già dimostrato la formula
$$\int e^{-ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2} d\xi = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}$$
da cui segue
$$\int e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2} d\xi = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}}$$
Usiamo la notazione
$$p_\varepsilon(x) = (4\varepsilon\pi)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}$$
allora si ha
$$(2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2} d\xi \equiv p_\varepsilon(x-y)$$
NOTARE CHE
$$\int p_\varepsilon(x)\,dx = 1 .$$

Vogliamo dimostrare che per q.o. $x$
$$I = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} \left( \int e^{-i\xi\cdot y} f(y)\,dy \right) d\xi = f(x)$$
NON SI PUÒ invertire l'ordine di integrazione (non vale FUBINI: $e^{ix\cdot\xi} e^{-i\xi y} f(y) \notin L^1(\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi)$)

però l'integrale $I$ si può scrivere (convergenza dominata) come un limite:
$$I(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2} \left( \int e^{-i\xi\cdot y} f(y)\,dy \right) d\xi$$

Adesso POSSIAMO APPLICARE FUBINI e si ha
$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2} \left( \int e^{-i\xi\cdot y} f(y)\,dy \right) d\xi =$$
$$= \int f(y)\, p_\varepsilon(x-y)\, dy$$

Quindi dobbiamo solo dimostrare che

PER QUASI OGNI $x$,

$$\int f(y)\,\rho_\varepsilon(x-y)\,dy \to f(x).$$

Ci siamo già trovati in una situazione quasi identica con le regolarizzazioni: se $f\in L^1$ sappiamo che $f_\varepsilon = \int f(y)\,\rho_\varepsilon(x-y)\,dy \to f$ in $L^1$ e quindi esiste una sottosuccessione $f_{\varepsilon_k}\to f$ q.o. QUI È LO STESSO: dato che $\int \rho_\varepsilon = 1$ e $\rho_\varepsilon = \rho_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\varepsilon^{-n}$, esattamente allo stesso modo si dimostra che

$$f*\rho_\varepsilon \to f \quad \text{in } L^1$$

e quindi per una certa sottosuccessione

$$f*\rho_{\varepsilon_j}\to f \quad \text{q.o. su } \mathbb{R}^n.$$

Passando al limite allora si ha

$$I(x) = f \quad \text{q.o.}$$ ]

NOTAZIONI

Introduciamo la notazione

$$\boxed{\overline{\mathcal{F}} f := \int e^{ix\cdot\xi} f(x)\,dx}$$

(abbiamo cambiato il segno di $e^{-ix\cdot\xi}$).

Allora la formula di inversione dice che

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\,\overline{\mathcal{F}}}$$

o equivalentemente

$$\boxed{\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} f = (2\pi)^n f}$$

($\forall f\in L^1$ tale che $\hat f\in L^1$).

Se scriviamo

$$\boxed{\check f(x) := f(-x)}$$ (RIFLESSIONE di $f$)

abbiamo anche le formule

$$\boxed{\mathcal{F}\mathcal{F} f = (2\pi)^n \check f}$$ cioè $\hat{\hat f} = (2\pi)^n \check f$.

# LA TEORIA $L^2$ per la TR. di FOURIER

<u>Oss</u> Se $f, g \in \mathcal{S}$ possiamo scrivere

$$\iint e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, g(\xi)\, d\xi =$$
$$= \int \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$
$$= \int f(x)\, \hat{g}(x)\, dx$$

cioè si ha $\boxed{\int \hat{f} g = \int f \hat{g}} \quad \forall f, g \in \mathcal{S}.$

Questi sono QUASI dei prodotti $L^2$: ricordare che $(f, g)_{L^2} = \int f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$ (c'è il coniugato).

Se vogliamo dei veri prodotti $L^2$ basta usare $\overline{\mathcal{F}}$:

$$\iint e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, \overline{g(\xi)}\, d\xi =$$
$$= \int \hat{f}(\xi)\, \overline{g(\xi)}\, d\xi$$
$$= \int f(x) \cdot \overline{\left(\int e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\, d\xi\right)}\, dx$$

cioè si ha

$$(\hat{f}, g)_{L^2} = (f, \overline{\mathcal{F}} g)_{L^2}$$

<u>CONSEGUENZE</u>

1) $\forall f, g \in \mathcal{S}$: $\boxed{\int \hat{f} g = \int f \hat{g}}$ (ok)

2) $\forall f, g \in \mathcal{S}$: $\boxed{(\mathcal{F} f, g)_{L^2} = (f, \overline{\mathcal{F}} g)_{L^2}}$ (ok).

3) L'aggiunto di $\mathcal{F}$ per il prodotto $L^2$ è $\overline{\mathcal{F}}$, ossia $\boxed{\mathcal{F}^* = \overline{\mathcal{F}}}$ [si tratta sempre di 2)].

4) <u>FORMULA di PLANCHEREL</u>: se $f \in \mathcal{S}$,

$$\boxed{\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^2}}$$

$\left[ \|\hat{f}\|_{L^2}^2 = (\mathcal{F} f, \mathcal{F} f) = (f, \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} f) = (f, (2\pi)^{-n} f) = (2\pi)^{-n} \|f\|_{L^2}^2 \right]$. $\left[\text{ricordare } \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1} \cdot (2\pi)^{-n}\right]$.

(5) Conseguenza FONDAMENTALE: dato che $\mathcal{S}$ è DENSO in $L^2$ (contiene $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$), $\mathcal{F}$ si può estendere ad un operatore limitato

$$\mathcal{F}: L^2 \to L^2$$

con norma $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} \le (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^2}$ ed inoltre $\mathcal{F}$ è invertibile con inversa $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^n \overline{\mathcal{F}} : L^2 \to L^2$.

Le formule

$$\boxed{\begin{array}{l} \int \hat{f} g = \int f \hat{g} \\ (\mathcal{F}f, g)_{L^2} = (f, \overline{\mathcal{F}}g)_{L^2} \\ \|\mathcal{F}f\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^2} \end{array}}$$

sono valide per tutte le $f, g \in L^2$.

# FOURIER, PRODOTTI e CONVOLUZIONI



La trasformata di Fourier scambia il prodotto di funzioni con la CONVOLUZIONE.
Valgono le formule, $\forall f, g \in \mathcal{S}$,

$$\boxed{\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \quad , \quad \widehat{f \cdot g} = (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g}}$$

[La prima si dimostra subito:

$$\widehat{f*g} = \int e^{-ix\cdot\xi} \int f(y) g(x-y) dy\, dx$$
$$= \iint e^{-iy\cdot\xi} f(y) \cdot e^{-i(x-y)\cdot\xi} g(x-y) dy\, dx$$

Cambiamo variabile $z = x-y$ in $dy$ $\Rightarrow$

$$= \iint e^{-iy\cdot\xi} f(y) \cdot e^{-iz\cdot\xi} g(z)\, dz\, dx$$
$$= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) .$$

La seconda segue dalla prima: ricordando la formula $\hat{\hat{f}} = (2\pi)^n \check{f} = (2\pi)^n f(-x)$ si ha

$$\widehat{\hat{f}\hat{g}} = (2\pi)^n f(-x) \cdot g(-x)$$

e d'altra parte per la prima formula

$$\widehat{\hat{f} * \hat{g}} = \hat{\hat{f}} \cdot \hat{\hat{g}} = (2\pi)^n f(-x) \cdot g(-x)$$

quindi

$$\widehat{\hat{f} * \hat{g}} = \widehat{(2\pi)^n \widehat{fg}}$$

e per l'iniettività di $\mathcal{F}$

$$\hat{f} * \hat{g} = (2\pi)^n \widehat{fg} \quad ] .$$

# TRASFORMATA di FOURIER di DISTRIBUZIONI

OSS Dall'identità $\int \hat{f} \cdot \varphi = \int f \hat{\varphi}$, che si può scrivere $T_{\hat{f}}(\varphi) = T_f(\hat{\varphi})$, è naturale definire la trasformata di Fourier di una distribuzione $u$ con la formula $\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi})$. Ma c'è un problema: $\hat{\varphi}$ NON È UNA FUNZIONE TEST; il meglio che si può dire è $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ (anche se $\varphi \in \mathcal{D}$). Però se $u \in \mathcal{S}'$, si può calcolare $u(\hat{\varphi})$ $\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

DEF Data $u \in \mathcal{S}'$, la sua trasformata di Fourier $\hat{u} \in \mathcal{S}'$ è definita da

$$\boxed{\hat{u}(\varphi) := u(\hat{\varphi})}$$

[$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi})$ è ben definita $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, è lineare, e sta in $\mathcal{S}'$ perché se $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$ allora $\hat{\varphi}_j \to 0$ in $\mathcal{S}$ (segue dalle formule per $\widehat{x\varphi}$ e $\widehat{D^\alpha \varphi}$) e quindi $u(\hat{\varphi}_j) \to 0$].

OSS NOTARE che abbiamo definito in un colpo solo $\hat{f}$ per qualunque $f \in L^p$ e addirittura per qualunque polinomio (perché $L^p \subseteq \mathcal{S}'$ e i polinomi sono elementi di $\mathcal{S}'$).

PROPRIETÀ

1. Se $u_j \to u$ in $\mathcal{S}'$ allora $\hat{u}_j \to \hat{u}$ in $\mathcal{S}'$
   [$\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\hat{u}_j(\varphi) = u_j(\hat{\varphi}) \to u(\hat{\varphi}) = \hat{u}(\varphi)$].
2. Vale ancora la formula di inversione.

Ossia, se definiamo $\overline{\mathcal{F}} u(\varphi) := u(\overline{\mathcal{F}} \varphi)$, si ha $\forall u \in \mathcal{S}'$ $\boxed{\overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} u = \mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} u = (2\pi)^n u}$

[Facilissimo: $\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}u(\varphi) = \mathcal{F}u(\bar{\mathcal{F}}\varphi) = u(\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\varphi)$
$= u((2\pi)^n\varphi) = (2\pi)^n u(\varphi)$, eccetera].

2' QUINDI in particolare $\mathcal{F}:\mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$ è biiettiva e la sua inversa $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\bar{\mathcal{F}}$.

3 Valgono le proprietà: $\forall u\in\mathcal{S}'$

$$D_\xi\hat{u} = \widehat{(i^{-1}xu)}, \qquad \xi\hat{u} = \widehat{(i^{-1}D_x u)}$$

[FACILISSIMO: $D_\xi\hat{u}(\varphi) = -\hat{u}(D_\xi\varphi) = -u(\widehat{D_\xi\varphi})$
$= \dots$ eccetera]

4 Se $u\in L^2$, la definizione data prima (cioè estendendo $\mathcal{F}$ a tutto $L^2$ con Plancherel) e quella in $\mathcal{S}'$ ovviamente coincidono
[$C^\infty_c$ è denso in $L^2$, quindi anche $\mathcal{S}$ lo è.
Le due definizioni coincidono su $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ coincidono su $L^2$].

ESERC Perché la nuova definizione di $\hat{u}$ coincide con quella classica se $u\in\mathcal{S}$?
[$\hat{u} = \int e^{-ix\xi}u(x)\,dx \Rightarrow T_{\hat{u}}(\varphi) = \int\hat{u}\varphi = \int u\hat{\varphi}$]

5 Se $0<a<n$, la funzione $\boxed{|x|^{-a}\in\mathcal{S}'}$ e la sua trasformata di F. è la funzione $\boxed{C|\xi|^{a-n}}$, dove $C$ è una opportuna costante che dipende da $a$ e $n$.
[Non facciamo la dim. completa, però notiamo che se $f=|x|^{-a}$ allora (a) $\hat{f}$ è radiale
(b) $S_\lambda f = f(\lambda x) = \lambda^{-a}f(x)$ e d'altra parte
$\widehat{S_\lambda f} = \lambda^{-n}S_{1/\lambda}\hat{f}$ da cui $S_{1/\lambda}\hat{f} = \lambda^{n-a}\hat{f}$

ossia $S_\lambda \hat{f} = \lambda^{a-n} \hat{f}$. Quindi vediamo che $\hat{f}$ è radiale e omogenea di grado $a-n$, proprio come la funzione $|\xi|^{a-n}$ ...]. (V)

(6) Sappiamo già che

$$\boxed{\|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}, \quad \|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^2}}$$

Usando la TEORIA dell'INTERPOLAZIONE si dimostra che allora vale

$$\boxed{\|\hat{f}\|_{L^{p'}} \le (2\pi)^{n/p} \|f\|_{L^p}, \qquad \forall\ 2 \le p \le \infty}$$

Queste si chiama la disuguagl. di HAUSDORFF-YOUNG (e NON È VERA per $1 \le p < 2$).

[senza dim.]

(7) Se $u \in \mathcal{S}'$ ha SUPPORTO COMPATTO, allora $\hat{u}$ è una FUNZIONE ANALITICA INTERA su $\mathbb{R}^n$ (cioè ammette uno sviluppo in serie di potenze in ogni punto, con raggio di convergenza $\infty$).

[senza dim.]

# ULTERIORI PROPRIETÀ di $\mathcal{F}$

① RIEMANN LEBESGUE. Sappiamo già che se $f \in L^1 \Rightarrow \mathcal{F}f \in L^\infty$. Ma vale molto di più:

$$\boxed{f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \text{ è CONTINUA, LIMITATA e tende a 0 all'}\infty}$$

[Dato che $C^\infty_c$ è denso in $L^1$, esiste una successione $f_j \in C^\infty_c$ tale che $\|f_j - f\|_{L^1} \to 0$. Dato che $f_j \in \mathcal{S}$, abbiamo anche $\hat{f}_j \in \mathcal{S}$ e

$$\|\hat{f}_j - \hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f_j - f\|_{L^1} \to 0$$

cioè $\hat{f}$ è limite uniforme di una successione di funzioni di $\mathcal{S}$. NE SEGUE a) che $\hat{f}$ è continua, b) che $\hat{f}$ tende a zero].

<u>ESERCIZIO</u> Se $f_j$ è una successione di funzioni continue, che tendono a 0 all'$\infty$, e che convergono uniformemente, allora anche la funzione limite tende a 0 all'infinito.

② ALCUNE TRASFORMATE INTERESSANTI

a) $\mathcal{F}\delta = 1$ (la funzione costante $= 1$)

b) $\mathcal{F}1 = (2\pi)^n \cdot \delta$

c) $\mathcal{F}x_j = (2\pi)^n i D_j \delta$

d) $\mathcal{F}x^\alpha = (2\pi)^n i^{|\alpha|} D^\alpha \delta$

[la (a) è facile: $\mathcal{F}\delta(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int e^0 \varphi =$
$= \int 1 \varphi = T_1(\varphi)$.

la (b) è l'inversa di (a)

la (c) segue da (b) e dalla regola $\widehat{x_j \cdot f} = (2\pi)^n i D_j \hat{f}$

la (d) è conseguenza di (c), per induzione].

(13) il TEOREMA di LIOUVILLE

Se $u \in \mathcal{S}'$ è ARMONICA, cioè $\Delta u = 0$, allora $u$ è un POLINOMIO.

[$u \in \mathcal{S}' \Rightarrow \Delta u \in \mathcal{S}'$. Inoltre

$$\mathcal{F}(\Delta u) = \mathcal{F}(D_1^2 + \dots + D_n^2 u) =$$

$$= -\xi_1^2 \mathcal{F}u - \dots - \xi_n^2 \mathcal{F}u$$

cioè $\mathcal{F}(\Delta u) = -|\xi|^2 \hat{u}$. Allora se $\Delta u = 0$ si ha $|\xi|^2 \hat{u} = 0$. Ma questo vuol dire che $\hat{u} = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus 0$, cioè $\operatorname{supp} \hat{u} \subseteq \{0\}$. Le uniche distribuzioni con supporto in 0 sono le combinazioni lineari

$$\hat{u} = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha D^\alpha \delta$$

e quindi

$$u = \mathcal{F}^{-1} \hat{u} = (2\pi)^n \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \mathcal{F}(D^\alpha \delta)$$

$$= \sum_{|\alpha| \le m} c'_\alpha \cdot x^\alpha \quad \text{polinomio} \;].$$

## (4) FORMULA di SOMMAZIONE di POISSON

(ovvero FORMULA di TRACCIA di SELBERG su $\mathbb{T}^1$).

$$\boxed{\text{TEOR} \quad \text{Se } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n)}$$

[Sappiamo che $\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)\,dx$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)$.

Poniamo
$$\varphi(\xi) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n+\xi)$$
Notare che questa serie converge UNIFORMEM. perché $\hat{f} \in \mathcal{S} \Rightarrow$ $\varphi$ è continua. Lo stesso vale per la serie delle derivate $\sum \partial_\xi^k \hat{f}(n+\xi)$, quindi $\varphi$ è $C^k$ $\forall k$ cioè $\varphi \in C^\infty$.

Notare poiché
$$\varphi(\xi+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n+\xi+1) = \sum_{n'\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n'+\xi)$$
e quindi $\varphi(\xi+1) = \varphi(\xi)$ cioè $\varphi$ è 1-PERIODICA

Allora $\varphi$ si può espandere in serie di Fourier
$$\varphi(\xi) = \sum c_k e^{-2\pi i k\xi}$$
dove
$$c_k = \int_0^1 e^{2\pi i k\xi}\varphi(\xi)\,d\xi$$
$$= \int_0^1 e^{2\pi i k\xi} \sum \hat{f}(n+\xi)\,d\xi$$
$$= \sum_n \int_0^1 e^{2\pi i k\xi} \hat{f}(n+\xi)\,d\xi \qquad (\xi' = n+\xi)$$
$$(e^{2\pi i k n} = 1)$$
$$= \sum_n \int_n^{n+1} e^{2\pi i k\xi'} \hat{f}(\xi')\,d\xi'$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi = (2\pi) f(2\pi k)$$

QUINDI $\varphi(\xi) = \sum_n \hat{f}(n+\xi) = 2\pi \sum_k f(2k\pi) e^{-2\pi i k\xi}$

e ponendo $\xi = 0$ si ha la tesi].

## ⑤ LE FUNZIONI TETA

Applichiamo POISSON alla gaussiana $(a>0)$

$$f(x) = e^{-ax^2} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} e^{-\xi^2/4a}$$

e otteniamo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} e^{-n^2/4a} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-an^2(2\pi)^2}$$

Scegliamo $a(2\pi)^2 = \pi\tau$, $\tau > 0$ cioè

$$a = \frac{\tau}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum e^{-\pi n^2/\tau} = \sum e^{-\pi\tau n^2}$$

La funzione

$$g_1(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\tau n^2}$$

si chiama anche PRIMA FUNZIONE TETA e abbiamo appena dimostrato la FORMULA di TRASFORM. di JACOBI

$$\boxed{g_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\, g_1\!\left(\frac{1}{\tau}\right)}.$$

# SPAZI di SOBOLEV, TEORIA $L^2$

Una delle più utili (e facili) applicazioni della trasformata di Fourier è la definizione degli spazi di Sobolev $H^s$, $s \in \mathbb{R}$.

OSS Useremo le seguenti notazioni:

$$\langle \xi \rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$$

$\langle D \rangle$ è l'operatore definito come

$$\boxed{\langle D \rangle f = \mathcal{F}^{-1}(\langle \xi \rangle \hat{f})}$$

$|D|$ è l'operatore definito come

$$\boxed{|D| f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi| \hat{f})}$$

Analogamente si definiscono ($s \in \mathbb{R}$)

$$\langle D \rangle^s f = \mathcal{F}^{-1}(\langle \xi \rangle^s \hat{f}), \quad |D|^s f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \hat{f}).$$

OSS È facile verificare che

$$\langle D \rangle^s \langle D \rangle^r f = \langle D \rangle^{s+r} f$$

$$|D|^s |D|^r f = |D|^{s+r} f$$

$$[\langle D \rangle^s \langle D \rangle^r f = \mathcal{F}^{-1}(\langle \xi \rangle^s \cancel{\mathcal{F}} \cancel{\mathcal{F}^{-1}} \langle \xi \rangle^r \hat{f}) = \dots]$$

Siamo PRONTI:

**DEF** $s \in \mathbb{R}$. Una $f \in \mathcal{S}'$ si dice di CLASSE $H^s$ se $\hat{f}$ è una funzione e $\langle \xi \rangle^s \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Lo spazio di tali funzioni si chiama $H^s$, SPAZIO di SOBOLEV di ORDINE $s$

**TEOR** $\|f\|_{H^s} := \|\langle \xi \rangle^s \hat{f}\|_{L^2}$ è una NORMA su $H^s$, $(f,g)_{H^s} = (\langle \xi \rangle^s \hat{f}, \langle \xi \rangle^s \hat{g})_{L^2}$ un prodotto SCALARE, e $H^s$ risulta per tale prodotto uno SPAZIO DI HILBERT

[Per dimostrare il teorema basta definire lo spazio $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ così:

$$f \in L^2_s(\mathbb{R}^n) :\Leftrightarrow \langle \xi \rangle^s f(\xi) \in L^2$$

dotato della norma $\|f\|_{L^2_s} = \|\langle \xi \rangle^s f\|_{L^2}$ e del prodotto scalare $(f,g)_{L^2_s} = (\langle \xi \rangle^s f, \langle \xi \rangle^s g)_{L^2}$.
È facile dimostrare che $L^2_s$ è completo (segue dalla completezza di $L^2$) ed è uno spazio di Hilbert. A questo punto osserviamo che la definizione di $H^s$ implica che $\mathcal{F} : H^s \to L^2_s$ è un isomorfismo, che porta la norma nella norma e il prodotto nel prodotto, quindi anche $H^s$ è un HILBERT ] .

## PROPRIETÀ degli SPAZI $H^s$

(1) $H^0 = L^2$ [infatti $L^2_0 = L^2$]

(2) Se $s \geq r \Rightarrow H^s \subseteq H^r$ con immersione continua cioè $\|u\|_{H^r} \leq \|u\|_{H^s}$

[basta scrivere $\langle\xi\rangle^r \leq \langle\xi\rangle^s \Rightarrow \|\langle\xi\rangle^r \hat{u}\| \underset{L^2}{\leq} \|\langle\xi\rangle^s \hat{u}\|$]

(3) Se $k \geq 0$ è INTERO, la norma $H^k$ si scrive in modo equivalente $\boxed{\|u\|^2_{H^k} \cong \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2}}$

[Il primo membro è $\|\langle\xi\rangle^k \hat{u}\|^2 = \int \langle\xi\rangle^{2k} |\hat{u}|^2$

Il secondo membro è

$$\sum_{|\alpha|\leq k} \|\xi^\alpha \hat{u}\|^2_{L^2} = \int \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2\Big) |\hat{u}|^2$$

Quindi basta dimostrare

$$\langle\xi\rangle^{2k} \cong \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2$$

Dato che $\langle\xi\rangle^{2k} = (1+|\xi|^2)^k = \sum \binom{k}{j} |\xi|^{2j}$ e ogni fattore $|\xi|^{2j}$ compare anche nella seconda somma, è chiaro che esiste $C>0$:

$$\langle\xi\rangle^{2k} \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2 .$$

Viceversa, dato che $|\xi^\alpha|^2 = |\xi_1^{\alpha_1}|^2 \cdots |\xi_n^{\alpha_n}|^2 \leq$
$\leq C(1+|\xi|^2)^k$ per $C$ opportuna (se $|\alpha|\leq k$)

$$\Rightarrow \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq C'(1+|\xi|^2)^k \quad ].$$

(4) L'operatore $\langle D\rangle^a$, $a\in\mathbb{R}$, è una ISOMETRIA $\langle D\rangle^a : H^s \to H^{s-a}$ per ogni $s\in\mathbb{R}$.

[$\|\langle D\rangle^a f\|_{H^{s-a}} = \|\langle\xi\rangle^a \langle\xi\rangle^{s-a} \hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{H^s}$]

(5) $\mathcal{S}$ è DENSO in $H^s$ $\forall s \in \mathbb{R}$

[Se $\langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2$, per densità esiste una succ. di funzioni test $\varphi_j$ tali che $\varphi_j \to \langle \xi \rangle^s \hat{u}$ in $L^2$. Anche le funzioni $\psi_j = \langle \xi \rangle^{-s} \varphi_j$ sono funzioni test, e se chiamiamo $u_j = \mathcal{F}^{-1}(\psi_j)$ si ha
(a) $u_j \in \mathcal{S}$, (b) $\|u_j - u\|_{H^s} = \|\langle \xi \rangle^s (\psi_j - \hat{u})\|_{L^2}$
$= \|\varphi_j - \langle \xi \rangle^s \hat{u}\|_{L^2} \to 0$ per ipotesi ].

(6) PRIMO ESEMPIO di IMMERSIONE di SOBOLEV

Se $\boxed{s > \frac{n}{2} \text{ allora } \|f\|_{L^\infty} \leq C_s \|f\|_{H^s}}$

e quindi $f \in H^s \Rightarrow f$ limitata, ANZI $f$ è CONTINUA.

$$\Big[\|f\|_{L^\infty} \leq \|\hat{f}\|_{L^1} = \int |\hat{f}| = \int \langle \xi \rangle^{-s} \langle \xi \rangle^s |\hat{f}|$$
$$\leq \Big(\int \langle \xi \rangle^{-2s}\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{f}|^2\Big)^{1/2}$$

Se $s > \frac{n}{2}$ l'integrale $\int \langle \xi \rangle^{-2s}$ è FINITO e si ha la tesi.

CONTINUITÀ: se approssimiamo $f$ con una successione $f_j \in \mathcal{S}$, otteniamo che $f$ è LIMITE UNIFORME di $f_j$ che sono continue ].

OSS Chiariamo bene: stiamo dicendo che SE $f \in H^s$, $s > n/2$, allora NELLA CLASSE di EQUIV. $[f]$ c'è un rappresentante continuo (che si può ad es. definire come il limite delle approssimanti in $\mathcal{S}$).

$$H^{n/2+\varepsilon} \hookrightarrow L^\infty$$

7) NON È VERO che $H^s \subseteq L^\infty$ se $s \leq n/2$.

ESEMPIO: $u(x) = \log(\log(1+|x|^2))$, $x \in \mathbb{R}^2$.

$u$ appartiene a $H^1(\mathbb{R}^2)$ ma chiaramente NON È LIMITATA

[verificare per esercizio!]

8) ANALOGAMENTE si OTTIENE che: $H^{n/2+1+\varepsilon}$ è contenuto in $C^1_b$ (funzioni $C^1$, tali che $f$ e $Df$ sono limitate) e in generale

$$H^{n/2+k+\varepsilon} \subseteq C^k_b .$$

9) Se $s > \frac{n}{2}$ allora $H^s$ è un'algebra:

$$\boxed{f, g \in H^s, \quad s > \frac{n}{2} \Rightarrow f \cdot g \in H^s}$$

[ $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g} = \int \hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)\, d\eta$.

Posso scrivere

$$\langle \xi \rangle^s = \langle \xi - \eta + \eta \rangle^s \leq (\langle \xi-\eta \rangle + \langle \eta \rangle)^s \quad (s>0!)$$
$$\leq C(\langle \xi - \eta \rangle^s + \langle \eta \rangle^s)$$

Quindi $\langle \xi \rangle^s |\hat{f} * \hat{g}| \leq C(\langle \xi \rangle^s |\hat{f}|) * |\hat{g}| + C|\hat{f}| * (\langle \xi \rangle^s |\hat{g}|)$

Ora prendiamo la norma $L^2$:

$$\|fg\|_{H^s} = \|\langle \xi \rangle^s (\hat{f} * \hat{g})\|_{L^2} \leq$$
$$\leq C\|(\langle \xi \rangle^s |\hat{f}|) * |\hat{g}|\|_{L^2} + C\| |\hat{g}| * (\langle \xi \rangle^s |\hat{f}|)\|_{L^2}$$
$$\leq C\|f\|_{H^s} \cdot \|\hat{g}\|_{L^1} + C\|\hat{g}\|_{L^1} \cdot \|f\|_{H^s}$$

(disug. di YOUNG). Quasi finito: basta notare che

$$\|\hat{f}\|_{L^1} = \int |\hat{f}| = \int \langle \xi \rangle^{-s} \langle \xi \rangle^s |\hat{f}| \leq \left(\int \langle \xi \rangle^{-2s}\right)^{1/2} \|f\|_{H^s}$$

e $\int \langle \xi \rangle^{-2s} < \infty$ se $s > n/2$, e analogamente per $\|\hat{g}\|_{L^1}$, da cui la TESI ].

(10) Se $u \in H^s$, $s \in \mathbb{R}$, $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$, allora $u_\varepsilon \to u$ in $H^s$.

[$\langle D\rangle^s u_\varepsilon = \langle D\rangle^s (u * \rho_\varepsilon) = (\langle D\rangle^s u) * \rho_\varepsilon$ (PERCHÉ?)
e questa converge a $\langle D\rangle^s u$ in $L^2$, quindi
$\|u_\varepsilon - u\|_{H^s} = \|\langle D\rangle^s u_\varepsilon - \langle D\rangle^s u\|_{L^2} \to 0$ ].

(11) $C^\infty_c$ è DENSO in $H^s$
[non è difficile ma omettiamo].

(12) <u>Il duale di $H^s$ è $H^{-s}$ : $(H^s)' \cong H^{-s}$</u>

PIÙ PRECISAMENTE: se $F \in (H^s)'$ è un funzionale lineare continuo su $H^s$, allora $\exists!\ f \in H^{-s}$ tale che
$$F(g) = \int \hat{f}\,\hat{g} \qquad \forall g \in H^s.$$

[Consideriamo
$$G(\varphi) := F(\langle D\rangle^{-s}\varphi).$$
$G$ è un funzionale lineare su $L^2$ (perché $\langle D\rangle^{-s}$ è una isometria da $L^2$ a $H^s$) quindi $\exists!$ $v \in L^2$ tale che $G(\varphi) = \int v \cdot \varphi$ $\forall \varphi \in L^2$,
cioè
$$\forall \varphi \in L^2, \quad F(\langle D\rangle^{-s}\varphi) = \int v \cdot \varphi =$$
$$= c\int \hat{v}\cdot\hat{\varphi} = c\int \langle\xi\rangle^s \hat{v} \cdot \langle\xi\rangle^{-s}\hat{\varphi}$$
che si può anche scrivere così: ($\psi = \langle D\rangle^{-s}\varphi$)
$$\forall \psi \in H^s, \quad F(\psi) = c\int \langle\xi\rangle^s \hat{v}\cdot\hat{\psi}$$
Ora chiamiamo $u = \langle D\rangle^s v$ e otteniamo che $u \in H^{-s}$, $F(\psi) = c\int \hat{u}\cdot\hat{\psi}$ $\forall \psi \in H^s$.
che è proprio la tesi. (UNICITÀ OVVIA perché se $F(\psi) = 0\ \forall \psi \Rightarrow \hat{u} = 0 \Rightarrow u = 0$) ].