CAPITOLO 1

Spazi metrici

1. Definizioni ed esempi

Definizione 1.1. Sia X un insieme qualsiasi. Una **distanza** su X è un'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni x, y in X, e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$ (positività);
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni x, y in X (simmetria);
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni x, y e z in X (disuguaglianza triangolare).

Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) con X insieme qualsiasi, e d distanza su X.

Esempio 1.2. Sia X un insieme qualsiasi e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, $d(x, y) = 0$ se $x = y$. Si verifica facilmente che i) e ii) valgono; per la iii), se $x = y$ non c'è nulla da dimostrare; se $x \neq y$, si deve provare che $d(x, z) + d(z, y) \geq 1$ per ogni x, y e z in X con $x \neq y$, fatto questo che risulta essere vero, essendo almeno uno tra i valori $d(x, z)$ e $d(y, z)$ uguale a 1 (non possono essere entrambi nulli, dato che se lo fossero, si avrebbe $x = z$ e $z = y$ per la i), da cui $x = y$, il che non è). La distanza d prende il nome di distanza discreta.

Esempio 1.3. Sia $X = \mathbb{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$. Allora $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è uno spazio metrico (le tre proprietà sono ben note...).

Teorema 1.4 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)**.** *Date due N-ple di numeri reali $(s_1, \ldots, s_N)$ e $(t_1, \ldots, t_N)$, si ha:*

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (s_i^2 + t_i^2)\,. \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. La formula (1.1) si ottiene sommando (per i che va da 1 a N) le disuguaglianze

$$|s_i\, t_i| \leq \frac{s_i^2 + t_i^2}{2}\,,$$

evidentemente vere essendo equivalenti alla disuguaglianza $(|s_i| - |t_i|)^2 \geq 0$. Per dimostrare la (1.2), osserviamo che è evidentemente vera se $(s_1, \dots, s_N) = (0, \dots, 0)$ o se $(t_1, \dots, t_N) = (0, \dots, 0)$; altrimenti, applichiamo la (1.1) alle N-ple $(x_1, \dots, x_N)$ e $(y_1, \dots, y_N)$ definite da

$$x_i = \frac{|s_i|}{\left(\sum_{i=1}^N s_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,, \qquad y_i = \frac{|t_i|}{\left(\sum_{i=1}^N t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Si ottiene, essendo $\sum_{i=1}^N x_i^2 = 1 = \sum_{i=1}^N y_i^2$,

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N s_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^N |s_i\, t_i| = \sum_{i=1}^N \frac{|s_i\, t_i|}{\left(\sum_{i=1}^N s_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 1\,,$$

da cui la tesi. ■

Esempio 1.5. Sia $X = \mathbb{R}^N$ e

$$d((x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N)) = \left(\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Si ha che $(\mathbb{R}^N, d)$ è uno spazio metrico. La i) e la ii) sono evidenti, mentre per la iii) procediamo come segue, indicando con $X = (x_1, \dots, x_N)$, $Y = (y_1, \dots, y_N)$ e $Z = (z_1, \dots, z_N)$ tre vettori di $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}
[d(X,Y)]^2 &= \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^N \left[(x_i - z_i)^2 + 2(x_i - z_i)\,(z_i - y_i) + (z_i - y_i)^2\right] \\
&= [d(X,Z)]^2 + [d(Z,Y)]^2 + 2\sum_{i=1}^N (x_i - z_i)\,(z_i - y_i)\,.
\end{aligned}$$

Applicando la (1.2), si ha

$$\sum_{i=1}^N (x_i - z_i)\,(z_i - y_i) \leq \left(\sum_{i=1}^N (x_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N (z_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(X,Y)\,d(Z,Y)\,.$$

Pertanto,

$$[d(X,Y)]^2 \leq [d(X,Z)]^2 + [d(Z,Y)]^2 + 2d(X,Z)\,d(Z,Y) = [d(X,Z) + d(Z,Y)]^2\,,$$

che è la iii).

Teorema 1.6 (Disuguaglianza di Young)**.** *Siano s, t due numeri reali e siano p e q due numeri reali tali che*

$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Allora

$$|s\,t| \leq \frac{|s|^p}{p} + \frac{|t|^q}{q}\,. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Se uno tra s e t è zero, non c'è nulla da provare. Se sono entrambi non nulli, dividiamo la (1.3) per $|t|^q$, ottenendo

$$\frac{|s|}{|t|^{q-1}} \leq \frac{|s|^p}{p\,|t|^q} + \frac{1}{q}\,.$$

Definiamo

$$\rho = \frac{|s|}{|t|^{q-1}}\,.$$

Essendo $1/p + 1/q = 1$, si ha $p(q-1) = q$, e quindi

$$\rho^p = \frac{|s|^p}{|t|^{p(q-1)}} = \frac{|s|^p}{|t|^q}\,.$$

Dimostrare la (1.3) è quindi equivalente a mostrare che

$$\rho \leq \frac{\rho^p}{p} + \frac{1}{q}\,,$$

per ogni $\rho \geq 0$, ovvero che

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^p}{p} - \rho + \frac{1}{q}$$

è positiva su $[0, +\infty)$. Si ha $\varphi(0) = 1/q$, mentre φ diverge per ρ tendente a $+\infty$ (essendo $p > 1$). Si ha poi

$$\varphi'(\rho) = \rho^{p-1} - 1\,,$$

e quindi $\varphi'(\rho) = 0$ se e solo se $\rho = 1$. Si vede facilmente che $\rho = 1$ è di minimo (assoluto) per φ; essendo

$$\varphi(1) = \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{q} = 0\,,$$

si ha la tesi. ■

Esercizio 1.7. Dimostrare il Teorema precedente usando il fatto che la funzione logaritmo è concava:

$$\ln(s\,t) = \ln(s) + \ln(t) = \frac{\ln(s^p)}{p} + \frac{\ln(t^q)}{q} \ldots$$

Semplice conseguenza della disuguaglianza di Young (si ragiona come nella dimostrazione del Teorema 1.4) è il risultato che segue.

Teorema 1.8 (Disuguaglianza di Hölder)**.** *Siano date due N-ple di numeri reali $(s_1, \dots, s_N)$ e $(t_1, \dots, t_N)$. Siano p e q due numeri reali tali che*

$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Allora

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \le \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{N} |s_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{N} |t_i|^q\,. \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \le \left(\sum_{i=1}^{N} |s_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |t_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}\,. \tag{1.5}$$

Si osservi che essendo $1/2+1/2 = 1$ (!), le formule (1.1) e (1.2) sono casi particolari di (1.4) e (1.5).

Esempio 1.9. Sia $X = \mathbb{R}^N$, $p > 1$ e

$$d_p((x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N)) = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Allora $(\mathbb{R}^N, d_p)$ è uno spazio metrico. Al solito, i) e ii) sono evidenti, mentre la disuguaglianza triangolare è di dimostrazione più complicata; si ha (supponendo $d_p(X, Y) \neq 0$, altrimenti la tesi è banale)

$$\begin{aligned} [d_p(X,Y)]^p &= \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p\, |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\le \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |z_i - y_i|\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Applicando la (1.5), si ha

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - z_i| \le \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{(p-1)\,q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}\,,$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1} |z_i - y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{(p-1)\,q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{N} |z_i - y_i|^{p} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Essendo $(p-1)q = p$, si ha allora

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1} |x_i - z_i| \le [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}}\, d_p(X,Z)\,,$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1} |z_i - y_i| \le [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}}\, d_p(Z,Y)\,.$$

Sostituendo in (1.6), si ha

$$[d_p(X,Y)]^p \le [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}}\, [d_p(X,Z) + d_p(Z,Y)]\,.$$

Dividendo per $d_p(X,Y)$ (che è diverso da zero per ipotesi), si ottiene la disuguaglianza triangolare osservando che $p - p/q = 1$.

Sempre in $\mathbb{R}^N$ è possibile definire

$$d_\infty((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1,\dots,N\}\,.$$

Lo spazio $(\mathbb{R}^N, d_\infty)$ è uno spazio metrico (verifica molto semplice, in questo caso).

Esercizio 1.10. Dimostrare che

$$\lim_{p\to+\infty} d_p((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)) = d_\infty((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N))\,.$$

Teorema 1.11 (Cauchy-Schwartz e Hölder)**.** *Siano date $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ due successioni di numeri reali;*

a) *se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2 < +\infty\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2 < +\infty\,,$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n\, t_n| \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; \tag{1.7}$$

b) *dati p e q due numeri reali tali che*

$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n|^p < +\infty\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |t_n|^q < +\infty\,,$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n\, t_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |t_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} . \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima formula (l'altra ha dimostrazione analoga). Sia N fissato; applicando (1.2), si ha

$$\sum_{n=1}^{N} |s_n\, t_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} s_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} t_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2\right)^{\frac{1}{2}} ;$$

la seconda disuguaglianza è dovuta al fatto che le serie sono a termini non negativi (e quindi la successione delle somme parziali è monotona crescente). Pertanto, essendo la disuguaglianza precedente vera per ogni N in $\mathbf{N}$, si ha

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{N} |s_n\, t_n|, n \in \mathbf{N}\right\} \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Essendo la serie di termine generico $|s_n\, t_n|$ una serie a termini non negativi, la successione delle somme parziali è monotona crescente, cosicché l'estremo superiore delle somme parziali coincide con il limite per N tendente a $+\infty$, cioè la somma della serie. ■

Esempio 1.12. Sia $p \geq 1$, e siano

$$X = \ell^p = \left\{ \{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\} ,$$

$$d_p(\{x_n\}, \{y_n\}) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Allora (ℓ^p, d_p) è uno spazio metrico. Come al solito, i) e ii) sono di verifica immediata, più complicato è il controllo della disuguaglianza triangolare. La verifica si effettua come nel caso di $(\mathbb{R}^n, d_p)$, usando (1.8). Se $p = 1$, la verifica discende semplicemente dalla disugaglianza triangolare in $\mathbb{R}$.

Si noti che gli spazi ℓ^p soddisfano le seguenti inclusioni, se $q > p \geq 1$:

$$\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q ,$$

e le inclusioni sono strette. Per verificare le inclusioni, è sufficiente osservare che se $\{x_n\}$ appartiene a ℓ^p, allora $|x_n|^p$ tende a zero, e quindi $|x_n|$ tende a zero. Pertanto, $|x_n|$ è definitivamente minore di 1, il che implica che $|x_n|^q \leq |x_n|^p$ definitivamente

(essendo $q > p$). Quindi $\{x_n\}$ appartiene a ℓ^q (per il criterio del confronto). L'inclusione è stretta in quanto (ad esempio) $x_n = 1/[n^{1/q} \ln^2(n)]$ è in ℓ^q ma non in ℓ^p se $p < q$.

Sia poi

$$X = \ell^\infty = \{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ è limitata}\} ,$$

$$d_\infty(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\} . \tag{1.9}$$

Allora (ℓ^∞, d_∞) è uno spazio metrico (la verifica questa volta è facile!) tale che $\ell^p \subset \ell^\infty$ per ogni $p \geq 1$, con inclusione stretta (ogni successione limitata ma non infinitesima non appartiene ad ℓ^p dal momento che la condizione necessaria di convergenza della serie non è verificata).

Esempio 1.13. Siano

$$X = C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\; f \text{ continua}\} ,$$

e

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in [a, b]\} = \max\{|f(x) - g(x)|, x \in [a, b]\} .$$

Allora $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ è uno spazio metrico, come si verifica facilmente (anche la disuguaglianza triangolare!).

Esempio 1.14. Siano

$$X = C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\; f \text{ continua}\} ,$$

e

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx .$$

Allora $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_1)$ è uno spazio metrico: la ii) e la iii) sono facilmente verificate (ricordando la monotonia dell'integrale), mentre la i) segue dall'osservazione che se l'integrale del modulo di una funzione continua h è nullo, allora h è identicamente nulla. Infatti, se h non fosse nulla, esisterebbe x_0 in $[a, b]$ tale che $|h(x_0)| > 0$; per il teorema della permanenza del segno, esisterebbe un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sul quale si ha $|h(x)| > |h(x_0)|/2$. Pertanto

$$0 = \int_a^b |h(x)| \, dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)| \, dx > \delta \, |h(x_0)| > 0 ,$$

da cui l'assurdo.

Teorema 1.15 (Disuguaglianza di Hölder)**.** *Siano f e g due funzioni in $C^0([a,b],\mathbb{R})$ e siano p e q maggiori di 1 e tali che $1/p+1/q=1$. Allora*

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.10}$$

Dimostrazione. È sufficiente partire dalla disuguaglianza di Young, vera per ogni x in $[a,b]$,

$$|f(x)\,g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}\,,$$

integrare i due termini su $[a,b]$ e poi applicare la disuguaglianza così trovata a

$$\bar{f}(x) = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}\,, \qquad \bar{g}(x) = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}\,,$$

non prima di aver osservato che se l'integrale di $|f(x)|^p$ (o di $|g(x)|^q$) è nullo, la f (ovvero la g) è nulla e la disuguaglianza (1.10) è banalmente vera. ■

Esempio 1.16. Siano $p>1$,

$$X = C^0([a,b],\mathbb{R}) = \{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ \ f \text{ continua}\}\,,$$

e

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ragionando come nell'Esempio 1.12, ed usando la (1.10), si dimostra facilmente che $(C^0([a,b],\mathbb{R}),d_p)$ è uno spazio metrico.

(!)Esercizio 1.17. Dimostrare che

$$\lim_{p\to+\infty} d_p(f,g) = d_\infty(f,g)\,.$$

Esempio 1.18. Siano

$$X = C^1([a,b],\mathbb{R}) = \{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ \ f \text{ continua con derivata continua}\}\,,$$

$$\bar{d}_{\infty,1}(f,g) = \sup\{|f'(x)-g'(x)|, x\in[a,b]\} = d_\infty(f',g')\,,$$

e

$$d_{\infty,1}(f,g) = d_\infty(f',g') + d_\infty(f,g)\,.$$

Allora $(C^1([a,b],\mathbb{R}),\bar{d}_{\infty,1})$ non è uno spazio metrico (dal momento che se f e g differiscono per una costante, $\bar{d}$ è nulla), mentre $(C^1([a,b],\mathbb{R}),d_{\infty,1})$ lo è. Dal momento

che l'aggiunta di $d_\infty(f,g)$ è dovuta solo alla necessità di distinguere due funzioni la cui differenza è costante, si può considerare su $C^1([a,b],\mathbb{R})$ la distanza

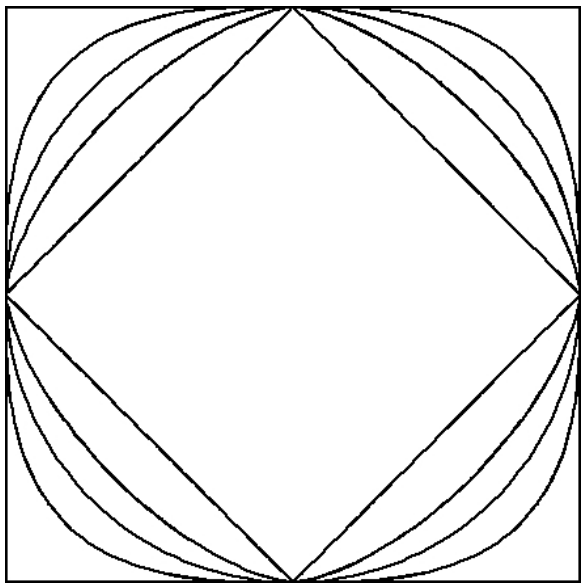
$$\tilde{d}_{\infty,1}(f,g) = d_\infty(f',g') + |f(x_0) - g(x_0)|\,,$$

con x_0 punto qualsiasi di $[a,b]$. In questa maniera, per calcolare la distanza tra f e g è sufficiente "conoscere" le derivate di f e g, ed il valore delle due funzioni in un unico punto (e non su tutto l'intervallo).

2. Proprietà degli spazi metrici

Definizione 2.1. Sia (X,d) uno spazio metrico, sia x_0 in X e $r > 0$. La **sfera aperta** di centro x_0 e raggio r è l'insieme

$$B_d(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}\,.$$



Le sfere di $(\mathbb{R}^2, d_p)$ per $p = 1$, $\frac{3}{2}$, 2, 3 e ∞ (procedendo dall'interno verso l'esterno)

Un sottoinsieme A di (X,d) si dice **aperto** se per ogni x_0 in A esiste $r > 0$ tale che $B_d(x_0,r) \subseteq A$. Un sottoinsieme C di (X,d) si dice **chiuso** se $A = C^c = X \setminus C$ è aperto.

Si verifica facilmente che in $(X, \text{discreta})$ ogni sottoinsieme è aperto (e quindi anche chiuso), mentre gli aperti di $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e di $(\mathbb{R}^N, d_p)$ (per ogni p) sono gli aperti "soliti".

Definizione 2.2. Sia (X,d) uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\}$ contenuta in X si dice **convergente** a x_0 in X se si ha

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x_0) = 0\,.$$

Quindi, come si vede, la definizione di convergenza in uno spazio metrico è ricondotta (in maniera naturale) alla convergenza a zero in $\mathbb{R}$ (meglio, nello spazio metrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) della successione $\{d(x_n, x_0)\}$.

Ad esempio, nello spazio metrico dell'Esempio 1.2, le successioni convergenti sono tutte e sole le successioni che sono definitivamente costanti. La convergenza in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e in $(\mathbb{R}^N, d_p)$ (per ogni p) è la convergenza solita che si dà per successioni in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{R}^N$ (quest'ultima è — come è noto — equivalente alla convergenza in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ delle N componenti).

La convergenza in $C^0([a,b]), d_\infty)$ è la convergenza uniforme.

Teorema 2.3. *Sia $\{x_n\}$ una successione convergente in (X, d). Allora il limite è unico.*

Dimostrazione. Se x_n convergesse a x_0 e a y_0, si avrebbe

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_0) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_0) = 0\,.$$

Ma allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_0, y_0) \le d(x_n, x_0) + d(x_n, y_0)\,,$$

da cui, ricordando che $d(x_0, y_0) \ge 0$ e passando al limite, $d(x_0, y_0) = 0$. Pertanto, $x_0 = y_0$. ∎

Definizione 2.4. Siano (X, d) e $(Y, \bar{d})$ due spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua** in $x_0 \in X$ se, per ogni successione $\{x_n\}$ di X convergente a x_0, la successione $\{f(x_n)\}$ di Y converge a $f(x_0)$. Analogamente,

$$\lim_{d(x_n,x_0)\to 0} \bar{d}(f(x_n), f(x_0)) = 0\,.$$

Questa definizione — negli spazi metrici — è equivalente all'altra (ben nota) data in termini di ε e δ:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \bar{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Esempio 2.5. Siano $(X, \text{discreta})$ e $(Y, \bar{d})$ due spazi metrici. Allora ogni funzione $f : X \to Y$ è continua. Infatti, se $\{x_n\}$ è una qualsiasi successione convergente in $(X, \text{discreta})$ a x_0, allora si deve avere $x_n = x_0$ definitivamente. Pertanto, $f(x_n) = f(x_0)$ definitivamente, da cui $\bar{d}(f(x_n), f(x_0)) \to 0$.

Esercizio 2.6. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia x_0 in X. Dimostrare che la funzione $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$ definita da $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$ è continua.

Definizione 2.7. Sia (Y, d) uno spazio metrico. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **limitata** se esistono $M > 0$ e $x_0 \in X$ tali che

$$f(x) \in B_d(x_0, M)\,, \qquad \forall x \in X\,. \tag{2.1}$$

Definizione 2.8. Siano (X, d) e $(Y, \bar{d})$ due spazi metrici. Definiamo

$$L(X, Y) = \{f : X \to Y\,,\ f \text{ limitata}\}\,,$$

$$C_{\mathrm{b}}(X, Y) = \{f : X \to Y\,,\ f \text{ continua e limitata}\}\,.$$

L'insieme $C_{\mathrm{b}}(X, Y)$ è alle volte anche denotato con $C_\ell(X, Y)$. L'insieme $L(X, Y)$ (e quindi anche $C_{\mathrm{b}}(X, Y)$ che ne è un sottoinsieme) può essere reso uno spazio metrico introducendo la distanza

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} \bar{d}(f(x), g(x))\,. \tag{2.2}$$

È facile verificare che d_∞ è effettivamente una distanza; si noti che è ben definita perché sia f che g sono funzioni limitate. Nel caso in cui $(X, d) = ([a, b], |\cdot|)$ e $(Y, \bar{d}) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $C_{\mathrm{b}}(X, Y)$ è proprio $C^0([a, b], \mathbb{R})$, dal momento che la limitatezza delle funzioni continue su $[a, b]$ è data dal teorema di Weierstrass. Inoltre, d_∞ è esattamente la distanza definita nell'Esempio 1.13.

Esempio 2.9. Siano $(X, d) = (\mathbb{N}, \text{discreta})$ e $(Y, \bar{d}) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Si ha allora, dal momento che ogni funzione f da X a Y non è niente altro che una successione di numeri reali,

$$L(X, Y) = \{\text{successioni limitate di numeri reali}\} = \ell^\infty\,.$$

Inoltre, essendo ogni "funzione" da X a Y continua (Esempio 2.5), si ha $C_{\mathrm{b}}(X, Y) = L(X, Y)$. La distanza d_∞ definita da (2.2) è esattamente la distanza definita su ℓ^∞ da (1.9).

3. Spazi metrici completi

Il seguente teorema mostra come una successione convergente soddisfi una proprietà aggiuntiva.

Teorema 3.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\{x_n\}$ una successione in X convergente a x_0 in X. Allora la successione $\{x_n\}$ soddisfa la* **condizione di Cauchy**, *ovvero*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Se x_n converge a x_0 in X, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $d(x_n, x_0) < \varepsilon/2$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$. Se n e m sono entrambi maggiori di n_ε si ha allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

Esempio 3.2. Il viceversa del teorema precedente non è vero: non tutte le successioni di Cauchy sono convergenti. Sia $X = (0, 2)$ e $d(x, y) = |x - y|$. Allora (X, d) è uno spazio metrico, come si verifica facilmente, e la successione $x_n = 1/n$, pur essendo di Cauchy, non è convergente. La successione è di Cauchy perché è convergente in $(\mathbb{R}, d)$, ma non è convergente in X perché il suo (unico!) limite è zero, che non appartiene ad X.

Definizione 3.3. Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

Nell'Esempio 1.2 lo spazio è completo perché le successioni di Cauchy sono tutte e sole le successioni definitivamente costanti (quindi convergenti). Tutti gli spazi metrici su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^N$ considerati nei vari esempi sono completi.

Un primo risultato generale sulla completezza è il seguente.

Teorema 3.4. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e sia $C \subseteq X$ un insieme chiuso. Allora (C, d) è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in (C, d). Allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in (X, d), che è completo per ipotesi. Pertanto, esiste x_0 in X tale che x_n converge a x_0. Essendo C chiuso, x_0 appartiene a C (se, infatti, x_0 non appartenesse a C, sarebbe nel complementare di C, che è aperto; allora esisterebbe un numero reale $r > 0$ tale che $B_d(x_0, r) \cap C = \emptyset$, il che è assurdo perché la successione $\{x_n\}$ si trova definitivamente in tale intorno per definizione di limite), che quindi è completo. ■

Un secondo risultato, ben più importante, riguarda $L(X, Y)$ e $C_{\mathrm{b}}(X, Y)$.

Teorema 3.5. *Siano (X, d) e $(Y, \bar{d})$ due spazi metrici. Se $(Y, \bar{d})$ è completo, lo sono sia $L(X, Y)$ e $C_{\mathrm{b}}(X, Y)$, dotati della metrica definita da (2.2).*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $(L(X, Y), d_\infty))$. Allora

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sup_{x \in X} \bar{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon\,.$$

Per definizione di sup, questo implica che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \bar{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \,, \ \forall x \in X \,.$$

Pertanto, per ogni x in X la successione $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $(Y, \bar{d})$, completo, e quindi converge ad un elemento di Y che definiremo $f(x)$. Passando al limite per m tendente ad infinito nella disuguaglianza $\bar{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$, si trova (grazie all'Esercizio 2.6)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \,, \quad \forall n \geq n_\varepsilon \,, \ \forall x \in X \,. \tag{3.1}$$

Per la disuguaglianza triangolare, ed essendo f_{n_ε} limitata per ipotesi, per ogni x di X si ha

$$\bar{d}(f(x), 0) \leq \bar{d}(f(x), f_{n_\varepsilon}(x)) + \bar{d}(f_{n_\varepsilon}(x), 0) \leq \varepsilon + M \,,$$

e quindi f appartiene a $L(X, Y)$. Inoltre, prendendo l'estremo superiore per x in X in (3.1), si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : d_\infty(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \,,$$

e quindi f_n converge a f in $(L(X, Y), d_\infty)$.

Se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $C_{\mathrm{b}}(X, Y)$, lo stesso ragionamento svolto precedentemente permette di costruire una funzione in $L(X, Y)$ tale che f_n converge a f in d_∞. L'unica cosa da dimostrare è pertanto la continuità di f. Se x_0 e x_1 appartengono a X, si ha

$$\bar{d}(f(x_0), f(x_1)) \leq \bar{d}(f(x_0), f_{n_\varepsilon}(x_0)) + \bar{d}(f_{n_\varepsilon}(x_0), f_{n_\varepsilon}(x_1)) + \bar{d}(f_{n_\varepsilon}(x_1), f(x_1)) \,.$$

La prima e la terza quantità sono minori di ε, mentre la seconda può essere scelta piccola prendendo x_0 ed x_1 vicini (dal momento che f_{n_ε} è continua). Pertanto, f è continua. ■

Corollario 3.6. *Sia $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ che (ℓ^∞, d_∞) sono completi.*

Teorema 3.7. *Sia $p > 1$. Lo spazio (ℓ^p, d_p) è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x^{(n)}\}$ una successione di Cauchy in (ℓ^p, d_p). Si ha allora

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \,. \tag{3.2}$$

Pertanto, per ogni k in $\mathbb{N}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \,,$$

e quindi la successione $\{n \mapsto x_k^{(n)}\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, che è completo. Siano allora x_k il limite per n tendente ad infinito di $x_k^{(n)}$, e $\bar{x}$ la successione $\{x_k\}$. Dal momento che da (3.2) segue che, per ogni N in $\mathbb{N}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \,,$$

passando al limite per m tendente ad infinito, si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \,.$$

Prendendo l'estremo superiore su N in $\mathbb{N}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \,,$$

da cui segue che $\{x^{(n)}\}$ converge a $\bar{x}$ in (ℓ^p, d_p). Il fatto che $\bar{x}$ appartenga ad ℓ^p segue poi dalla disuguaglianza triangolare per d_p:

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = d_p(\bar{x}, 0) \leq d_p(\bar{x}, x^{(n_\varepsilon)}) + d_p(x^{(n_\varepsilon)}, 0) < +\infty \,,$$

essendo $x^{(n_\varepsilon)}$ in ℓ^p. ■

Esempio 3.8. Lo spazio $C^0([a,b]), d_1)$ non è completo. Consideriamo infatti $C^0([-1,1], \mathbb{R})$ e la successione $f_n(x)$ così definita:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, -1/n], \\ nx & \text{se } x \in (-1/n, 1/n) \\ 1 & \text{se } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

La successione f_n è di Cauchy; infatti f_n e f_m differiscono al più (se $m > n$) sull'insieme $(-1/n, 1/n)$ e su questo insieme si ha $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 2$. Allora

$$d_1(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| \, dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)| \, dx \leq \frac{4}{n} \,,$$

che può essere reso minore di ε se n è sufficientemente grande. D'altra parte non esiste nessuna funzione continua f tale che

$$d_1(f_n, f) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)| \, dx \to 0 \,.$$

Sia infatti $a > 0$; allora

$$\int_a^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0\,,$$

essendo questa quantità positiva e minore di $d_1(f_n, f)$. Se n è tale che $1/n < a$ (fatto che accade definitivamente), dalla definizione di f_n si ha

$$\int_a^1 |1 - f(x)|\, dx \to 0\,,$$

da cui (essendo questa quantità indipendente da n),

$$\int_a^1 |1 - f(x)|\, dx = 0\,,$$

il che implica che $f \equiv 1$ su $[a, 1]$ per ogni $a > 0$. Con ragionamento analogo si prova che $f \equiv -1$ su $[-1, -a]$ con $a > 0$. Ma allora

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)\,,$$

e quindi f non può essere continua in $x = 0$.

Esempio 3.9. Lo spazio $(X, d) = ((0, 1), |\cdot|)$ non è completo. Può, però, essere "reso" completo, aggiungendo i due punti 0 ed 1, senza modificare la distanza; in altre parole, si può prendere la "chiusura" di X in $\mathbb{R}$ (di $(X, |\cdot|)$ nello spazio metrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$), ed ottenere così uno spazio metrico completo. L'aggiunta dei due punti 0 ed 1 è "minimale" nel senso che per rendere X completo (senza cambiare metrica) non è necessario utilizzare altri punti. Si osservi che esistono successioni di Cauchy tutte contenute in X che convergono a 0 o ad 1 (mentre non esistono successioni di Cauchy contenute in X che convergono ad un qualsiasi numero reale non appartenente a $[0, 1]$).

Lo spazio $(X, d) = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ non è completo. Ad esempio, la successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,,$$

è contenuta in $\mathbb{Q}$, è di Cauchy (perché converge in $\mathbb{R}$ ad "e"), ma il limite non è un numero razionale. Anche in questo caso, come nel precedente, si può rendere $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ completo "aggiungendo" i limiti delle successioni di Cauchy di razionali. Ricordando che ogni numero reale è limite (in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) di una successione di razionali (dunque di una successione di Cauchy di razionali), si ottiene tutto $\mathbb{R}$.

Lo spazio $(X, d) = (\{f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) : d_\infty(f, 0) < 1\}, d_\infty)$ non è completo. Ad esempio, la successione $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$ è in X, è di Cauchy (dal momento che converge uniformemente a $f(x) = 1$), ma il suo limite non è in X. Anche in questo caso, si può rendere (X, d) completo "aggiungendo" le funzioni continue su $[a, b]$ tali che

$d_\infty(f,0) = 1$. Il risultato, che è $(\{f \in C^0([a,b],\mathbb{R}) : d_\infty(f,0) \leq 1\}, d_\infty)$, è completo essendo chiuso in $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$, come si verifica facilmente. Si noti che, essendo possibile ottenere ogni funzione f tale che $d_\infty(f,0) = 1$ come limite uniforme della successione $f_n = \frac{n}{n+1} f$ (che è tutta contenuta in X), e dal momento che nessuna funzione tale che $d_\infty(f,0) > 1$ può essere ottenuta come limite uniforme di funzioni in X, ancora una volta abbiamo reso X completo aggiungendo i limiti delle successioni di Cauchy contenute in X.

A questo punto ci si può chiedere se l'operazione dell'esercizio precedente si può sempre effettuare. La risposta è affermativa, ed è data dal seguente teorema.

Teorema 3.10 (Completamento)**.** *Dato uno spazio metrico (X,d), esiste uno spazio metrico* **completo** *$(Y,\bar{d})$ ed un'applicazione $i : X \to Y$ tale che*

(1) *i è un'***isometria***, ovvero $\bar{d}(i(x_0), i(x_1)) = d(x_0, x_1)$, per ogni x_0, x_1 in X;*
(2) *$i(X)$ è* **denso** *in Y, ovvero la chiusura di $i(X)$ in Y è Y.*

Dimostrazione. Sia
$$\mathcal{C} = \{\{x_n\} \text{ di Cauchy in } (X,d)\}\,.$$

Passo 1: Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ appartengono a $\mathcal{C}$, allora la successione $z_n = d(x_n, y_n)$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Infatti si ha
$$z_n = d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x_m) + d(x_m,y_m) + d(y_m,y_n) = d(x_n,x_m) + z_m + d(y_m,y_n),$$
da cui
$$z_n - z_m \leq d(x_n,x_m) + d(y_m,y_n)\,.$$
Scambiando il ruolo di n e m si trova la disuguaglianza $z_m - z_n \leq d(x_n,x_m) + d(y_m,y_n)$, da cui segue
$$|z_n - z_m| \leq d(x_n,x_m) + d(y_m,y_n)\,.$$
A questo punto, fissato $\varepsilon > 0$, è sufficiente scegliere n ed m più grandi di
$$n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon(\{x_n\}), n_\varepsilon(\{y_n\}))$$
per avere che $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Passo 2: Essendo $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ completo, per ogni coppia di successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ di $\mathcal{C}$, esiste il limite di $d(x_n,y_n)$. Definiamo in $\mathcal{C}$ la relazione seguente
$$\{x_n\}\rho\{y_n\} \iff \lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_n) = 0\,.$$
Si vede facilmente che ρ è una relazione di equivalenza (la transitività è conseguenza della disuguaglianza triangolare) su $\mathcal{C}$. Definiamo Y come lo spazio quoziente di $\mathcal{C}$ modulo la relazione ρ. Successivamente, rendiamo Y uno spazio metrico nel modo seguente: siano $\bar{x}$ e $\bar{y}$ in Y, e siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni in $[\bar{x}]$ e $[\bar{y}]$ rispettivamente. Allora
$$\bar{d}(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_n)\,.$$
Tale definizione è ben posta, dal momento che cambiando rappresentanti in $[\bar{x}]$ e $[\bar{y}]$ il limite non cambia (sempre per la disuguaglianza triangolare). La funzione $\bar{d}$ è non negativa (dal

momento che d lo è), e si annulla se e solo se $\bar{x} = \bar{y}$ (per definizione, se il limite di $d(x_n, y_n)$ è zero, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono nella stessa classe di equivalenza). La simmetria è conseguenza della simmetria di d, mentre la disuguaglianza triangolare segue passando al limite per n tendente ad infinito nella disuguaglianza

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)\,.$$

Passo 3: Dato x in X, definiamo $\mathrm{cost}(x)$ la successione che ha tutte le componenti uguali ad x. Tale successione è evidentemente in $\mathcal{C}$. Definiamo $i : X \to Y$ nel modo seguente: $i(x) = [\mathrm{cost}(x)]$. Essendo la definizione di $\bar{d}$ indipendente dalla scelta del rappresentante nella classe di equivalenza, si può scegliere la successione $\mathrm{cost}(x)$ in $[\mathrm{cost}(x)]$ e si ha allora

$$\bar{d}(i(x), i(y)) = \lim_{n\to+\infty} d((\mathrm{cost}(x))_n, (\mathrm{cost}(y))_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x, y) = d(x, y)\,,$$

e quindi i è un'isometria.

Passo 4: $i(X)$ è denso in $(Y, \bar{d})$.

Sia $\bar{y}$ in Y, e sia $\{x_m\}$ una successione qualsiasi in $[\bar{y}]$. Definiamo $y_m = i(x_m) = [\mathrm{cost}(x_m)]$ e calcoliamo $\bar{d}(y_m, y)$. Si ha

$$\bar{d}(y_m, y) = \lim_{n\to+\infty} d((\mathrm{cost}(x_m))_n, x_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x_m, x_n)\,.$$

Essendo la successione $\{x_m\}$ in $\mathcal{C}$, la successione $\{x_m\}$ è di Cauchy in (X, d). Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon\,, \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon\,.$$

Questo fatto implica che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_m, x_n) \leq \varepsilon\,, \quad \forall m \geq n_\varepsilon$$

(ricordiamo che tale limite esiste perché la successione $\{n \mapsto d(x_m, x_n)\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$). Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che $\bar{d}(y_m, y) \leq \varepsilon$ per ogni $m > n_\varepsilon$, ovvero si ha che $\{y_m\}$ converge a y in $(Y, \bar{d})$.

Passo 5: $(Y, \bar{d})$ è completo.

Sia $\{x^{(n)}\}$ una successione di Cauchy in $(Y, \bar{d})$. Dal momento che $i(X)$ è denso in $(Y, \bar{d})$, per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste x_n in X tale che

$$\bar{d}(x^{(n)}, i(x_n)) \leq \frac{1}{n}\,. \tag{3.3}$$

Mostriamo che la successione $\{x_n\}$ è in $\mathcal{C}$. Si ha infatti (ricordando che i è un'isometria),

$$d(x_n, x_m) = \bar{d}(i(x_n), i(x_m)) \leq \bar{d}(i(x_n), x^{(n)}) + \bar{d}(x^{(n)}, x^{(m)}) + \bar{d}(x^{(m)}, i(x_m))\,.$$

Usando (3.3), e scegliendo n e m sufficientemente grandi (in modo che $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{m}$ siano minori di ε, e in modo che $\bar{d}(x^{(n)}, x^{(m)})$ sia anch'essa minore di ε), si prova che $d(x_n, x_m) < 3\varepsilon$ e quindi $\{x_n\}$ è in $\mathcal{C}$. Sia ora $\bar{x} = [\{x_n\}]$; mostriamo che $\{x^{(n)}\}$ converge a $\bar{x}$ in $(Y, \bar{d})$. Si ha infatti, sempre per (3.3), e per definizione di $\bar{d}$,

$$\bar{d}(\bar{x}, x^{(n)}) \leq \bar{d}(\bar{x}, i(x_n)) + \bar{d}(i(x_n), x^{(n)}) \leq \lim_{m\to+\infty} d(x_n, x_m) + \frac{1}{n}\,.$$

Ricordando che $\{x_n\}$ è di Cauchy, se n è sufficientemente grande si ha $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ e $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Pertanto, per tali n, $\bar{d}(\bar{x}, x^{(n)}) \leq 2\varepsilon$, da cui la tesi. ∎

Osservazione 3.11. Si può anche dimostrare che lo spazio metrico $(Y, \bar{d})$ è unico a meno di isometrie, ovvero se esiste un altro spazio metrico $(Z, \tilde{d})$ che verifica 1. e 2. del teorema precedente, allora esiste un'isometria biiettiva $\bar{i}$ tra $(Y, \bar{d})$ e $(Z, \tilde{d})$.

(!)Esercizio 3.12. Nel caso di $(C^0([a,b], \mathbb{R}), d_1)$, chi sono Y e i? Ovvero, se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in d_1, che proprietà ha il suo limite in Y? È chiaro che non è possibile ragionare come nell'Esempio 3.9, perché in tutti e tre i casi era sufficiente prenderne la chiusura (e scegliere per i l'identità) per completarlo (dato che lo spazio non completo era contenuto in un altro completo). In questo caso $C^0([a,b], \mathbb{R})$ è già "tutto lo spazio", il che vuol dire che sarà necessario ampliarlo con funzioni non continue per renderlo completo. Ma non tutte le funzioni discontinue sono integrabili (secondo Riemann)...

4. Gli spazi normati

Come abbiamo detto all'inizio del capitolo, uno spazio metrico è una coppia (X, d), con X un insieme e d una distanza. Sull'insieme X non si fa alcuna ipotesi; in altre parole, non viene richiesta nessuna struttura. Per poter definire una **norma**, invece, lo spazio X deve essere almeno uno spazio vettoriale; per semplicità, supporremo sempre che X sia uno spazio vettoriale sui reali.

Definizione 4.1. Uno spazio normato è una coppia $(X, \|\cdot\|)$, con X spazio vettoriale, e $\|\cdot\|$ un'applicazione da X in $\mathbb{R}$ tale che

i) $\|x\| \geq 0$ per ogni x in X, e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ per ogni x in X e per ogni λ in $\mathbb{R}$;
iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni x e y in X.

Esempi di spazi normati sono $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, come si verifica facilmente, e $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$, dove $p \geq 1$ e

$$\|(x_1, \ldots, x_N)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La verifica che $\|\cdot\|_p$ sia una norma è lasciata come esercizio (si tratta di applicare la disuguaglianza di Hölder in maniera opportuna).

È anche facile verificare che $(C^0([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, dove

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

è uno spazio normato.

A ben vedere, gli esempi precedenti sono stati ottenuti a partire dagli esempi degli spazi metrici definiti nel primo paragrafo semplicemente considerando come

norma del vettore x la sua distanza dal vettore nullo. Questo fatto non è però vero sempre; ovvero, se abbiamo uno spazio vettoriale X con una distanza d, la funzione $\|x\| = d(x, 0)$ non è necessariamente una norma. Quello che è sempre vero, invece, è il contrario.

Proposizione 4.2. *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato; allora la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definita da $d(x, y) = \|x - y\|$ è una distanza su X.*

Dimostrazione. Che $d(x, y)$ sia non negativa, e nulla se e solo se $x = y$, segue dal primo assioma sulle norme. Che sia simmetrica, segue dal secondo:

$$d(y, x) = \|y - x\| = \|-(x - y)| \ = |-1| \, | \, x - y\| = \|x - y\| = d(x, y) \, .$$

La disuguaglianza triangolare, infine, segue dalla iii):

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y) \, ,$$

come volevasi dimostrare. ■

Il viceversa del risultato precedente, invece, non è vero: non tutte le distanze "provengono" da una norma. Ad esempio, la metrica discreta non proviene da nessuna norma, dato che $d(x, 0)$ non soddisfa la ii).

In definitiva, l'insieme degli spazi vettoriali normati è contenuto, strettamente, nell'insieme degli spazi vettoriali metrici.

Uno spazio vettoriale normato che, come spazio metrico con la metrica indotta dalla norma, risulti completo, si dice **spazio di Banach**.

5. Il Teorema delle contrazioni

Molto spesso, in analisi, risolvere un'equazione comporta la risoluzione di un cosiddetto **problema di punto fisso**. Data una funzione $f : X \to X$ (è importante che lo spazio di partenza e quello di arrivo siano lo stesso), un elemento $\bar{x}$ di X si dice **punto fisso** di f se si ha $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Ogni equazione $g(x) = 0$ (con g, ad esempio, definita su $\mathbb{R}$ e a valori reali) si può riscrivere come problema di punto fisso; infatti, $g(x_0) = 0$ se e solo se $x_0 + g(x_0) = x_0$, ovvero se e solo se x_0 è punto fisso per la funzione $f(x) = x + g(x)$. Fin qui, nulla di trascendentale: abbiamo solo trasformato il problema in un altro equivalente, e apparentemente più difficile (non si capisce perché risolvere l'equazione $x^2 - 1 = 0$ sia più complicato (o più semplice) di trovare un punto fisso per la funzione $x + x^2 - 1$).

In alcuni casi, però, il problema di risolvere un'equazione si presenta naturalmente sotto forma di punto fisso, come nell'esempio che segue.

Esempio 5.1. Vogliamo trovare $x > 0$ soluzione di

$$x^3 = \ln(2 + x)\,. \tag{5.1}$$

Per risolverla, operiamo così : fissiamo x_0 in $\mathbb{R}$, e consideriamo l'equazione (più semplice)

$$x^3 = \ln(2 + x_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{\ln(2 + x_0)}\,,$$

e costruiamo l'applicazione S da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ definita da

$$S(x_0) = \sqrt[3]{\ln(2 + x_0)}\,,$$

ovvero $S(x_0)$ è l'unica radice reale y dell'equazione $y^3 = \ln(2 + x_0)$, cioè $[S(x_0)]^3 = \ln(2 + x_0)$. Sia ora $\bar{x}$ un punto fisso di S (supponiamo di avere degli strumenti (cioè, teoremi) che ci garantiscano che S ha un punto fisso). Questo vuol dire che si ha

$$[\bar{x}]^3 = [S(\bar{x})]^3 = [\text{per definizione di } S] = \ln(2 + \bar{x})\,,$$

e quindi $\bar{x}$ risolve (5.1). Pertanto, un teorema di esistenza di punto fisso ci permette di "dimostrare" un teorema di esistenza per un'equazione.

Di teoremi di punto fisso ne abbiamo già incontrato uno, sia pure "sotto mentite spoglie".

Teorema 5.2. *Sia $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ una funzione continua. Allora esiste $\bar{x}$ in $[-1, 1]$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

Dimostrazione. Se $f(1) = 1$ o se $f(-1) = -1$, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora che $f(1) \neq 1$ e che $f(-1) \neq -1$. Siccome f assume valori in $[-1, 1]$, deve essere per forza

$$f(1) < 1\,, \qquad f(-1) > -1\,.$$

Definiamo ora $g(x) = f(x) - x$. Allora g è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ed è tale che

$$g(1) = f(1) - 1 < 0\,, \qquad g(-1) = f(-1) - (-1) = f(-1) + 1 > 0\,.$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste $\bar{x}$ in $(-1, 1)$ tale che $g(\bar{x}) = 0$, cioè tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$. ∎

Esercizio 5.3. Supponiamo ora di sapere che il Teorema 5.2 è vero. Dimostrare il Teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue usando il Teorema 5.2 (ed il Teorema di Weierstrass).

Il problema è che spesso è difficile verificare non già la continuità di f, quanto piuttosto il fatto che esista un insieme "invariante" per la funzione f (come nel teorema precedente, in cui $[-1, 1]$ andava a finire in se stesso). Ovviamente ogni

funzione può essere vista come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ma la dimostrazione precedente non funziona, in quanto è necessario trovarsi su un intervallo limitato.

Nel contesto degli spazi metrici completi, è invece possibile dare un teorema di esistenza (e di unicità) per punti fissi di particolari applicazioni.

Definizione 5.4. Sia (X, d) uno spazio metrico; una funzione $f : X \to X$ si dice una **contrazione** se esiste $L \in [0, 1)$ tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y)\,, \qquad \forall x, y \in X \tag{5.2}$$

In altre parole, una contrazione è una funzione lipschitziana di costante di lipschitzianità minore (strettamente!) di 1.

Esempio 5.5. Se (X, d) è lo spazio dell'Esempio 1.2, le uniche contrazioni sono le funzioni costanti.

In $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sono contrazioni le funzioni $f(x) = x/2$ ($L = 1/2$), la funzione $x \mapsto x^2$ su $[-1/4, 1/4]$ (nuovamente $L = 1/2$, dimostrarlo con il teorema di Lagrange), mentre non è una contrazione (pur essendo lipschitziana) la funzione $x \mapsto x^2$ su $[0, 1]$.

Teorema 5.6 (Teorema delle contrazioni – Banach-Caccioppoli)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $f : X \to X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto fisso di f.*

Dimostrazione. Iniziamo con l'unicità; supponiamo per assurdo che esistano x e y in X tali che $f(x) = x$ e $f(y) = y$, con $x \neq y$. Allora

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y)\,,$$

da cui $(1 - L)\, d(x, y) \leq 0$. Essendo $1 - L$ non negativo, ne segue che deve essere $d(x, y) \leq 0$, da cui $d(x, y) = 0$; pertanto $x = y$, assurdo.

Per quanto riguarda l'esistenza, sia x_0 in X, e definiamo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ e, per ricorrenza, $x_{n+1} = f(x_n)$. Abbiamo così una successione $\{x_n\}$ contenuta in X. Sia n in $\mathbb{N}$ fissato; si ha

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq L\, d(x_n, x_{n-1}) \\ &= L\, d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq L^2\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \ldots \leq L^n\, d(x_1, x_0)\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Siano ora $m > n \geq 1$. Allora, per la disuguaglianza triangolare e la (5.3),

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k \, d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0) \, L^n \sum_{k=n}^{m-1} L^{k-n} \\ &= d(x_1, x_0) \, \frac{L^n \, (1 - L^{m-n})}{1 - L} \leq d(x_1, x_0) \, \frac{L^n}{1 - L} \, . \end{aligned}$$

Siccome $L < 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_1, x_0) \, \frac{L^n}{1 - L} = 0 \, .$$

Ne segue che, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste n_ε tale che se n, $m \geq n_\varepsilon$, si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon \, .$$

Pertanto la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy. Essendo (X, d) completo, la successione converge verso un certo $\bar{x}$ di X, cioè $d(x_n, \bar{x})$ tende a zero per n tendente all'infinito. Dunque, essendo $0 \leq d(f(x_n), f(\bar{x})) \leq L \, d(x_n, \bar{x})$, ne segue che $f(x_n)$ converge a $f(\bar{x})$. D'altra parte, però, $f(x_n) = x_{n+1}$ e quindi $f(x_n)$ converge anche a $\bar{x}$. Dunque $f(\bar{x}) = \bar{x}$, come volevasi dimostrare. ■

Osservazione 5.7. Si osservi che la dimostrazione è costruttiva: qualsiasi sia x_0, la successione definita per ricorrenza a partire da x_0 converge al punto fisso (che è unico). Ad esempio, sia $f(x) = \cos(x)$ con $X = [0, 1]$ (che è completo con la metrica data da $d(x, y) = |x - y|$). Allora $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ed è una contrazione (infatti $|f'(x)| \leq \cos(1) < 1$). Per calcolare il punto fisso si può fare così : accendere la calcolatrice, e settarla in radianti. Scrivere un qualsiasi numero positivo e minore di 1 (che è x_0). Premere il tasto "cos"; il risultato è $x_1 = \cos(x_0)$; premere nuovamente il tasto "cos"; dopo n ripetizioni di questa procedura, il risultato si stabilizza, e il valore trovato è il (in realtà un'approssimazione del) punto fisso ($\bar{x} = 0.739085133215 \ldots$).

Nel caso dell'Esempio 5.1, la funzione S (della quale si cerca un punto fisso) è la funzione $S : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definita da $S(x) = \sqrt[3]{\ln(2 + x)}$. Si ha

$$S'(x) = \frac{1}{3[\ln(2 + x)]^{\frac{2}{3}} \, (2 + x)} \, ,$$

che si vede subito essere minore di 1 per ogni $x \geq 0$ (l'estremo superiore è $1/6 \ln(2)^{\frac{2}{3}}$). Pertanto S è una contrazione su $[0, +\infty)$ che è completo. Dunque esiste un unico punto fisso di S, che è l'unica soluzione positiva dell'equazione $x^3 = \ln(2 + x)$.