Tra arte e matematica c'è soltanto una bolla di sapone...

Valerio Vassallo

Université des Sciences et Technologies de Lille   Cité des Géométries de Maubeuge

Conferenza Roma - Facoltà di Architettura
Venerdì 11 gennaio 2008

C'era una volta...

Credo che si possa ancora raccontare a degli adulti una storia al posto della solita conferenza di matematica.

Riflettendo un pò, la parola conferenza significa *mettere insieme, riunire*.

È anche l'idea di questa mostra : riunire più idee attorno ad un tenue filo conduttore, le *bolle di sapone*.

Adesso, non chiedetemi perchè proprio le bolle di sapone ; sarebbe un pò lungo rispondere. Per soddisfare la curiosità eventuale di qualcuno di voi, dirò semplicemente che il mio interesse verso questi oggetti, apparentemente semplici, è nata dall'incontro con alcuni matematici che si interessano alle bolle di sapone e dalla lettura di libri appassionanti sull'argomento.

Perchè, come vedremo, le bolle di sapone, ben che siano discrete, che si formino e spariscano sotto i nostri occhi ogni giorno, quando ci laviamo le mani o quando laviamo i piatti oppure, leggere, volino via quando soffiamo su una di esse, le bolle di sapone sono....

Un attimo... È così che comincia la nostra storia, o quasi. In una sera d'estate.

Quella sera, Martino, un bambino curioso, residente alla periferia di Maubeuge, nel Nord della Francia, era andato a letto più presto del solito.

La giornata era stata faticosa : sveglia di buon'ora, una colazione consumata velocemente, poi di corsa a scuola per non arrivare in ritardo. Un compito in classe, una lezione di storia sul Risorgimento, l'ora di ginnastica particolarmente impegnativa e, nel pomeriggio, i compiti per l'indomani.

La giornata dunque era stata ancora intensa in quanto Martino aveva l'abitudine di porsi molte domande.

Durante la colazione, aveva degustato il buon miele di Etienne, un agricoltore di Molezon, un paesino minuscolo delle Cevennes, nel Sud della Francia.

Etienne aveva incollato sul barattolo un'etichetta raffigurante un favo, quell'insieme di celle a forma esagonale, dove le api depongono uova, miele e polline.

Economiques abeilles

Intérieur de ruche : on distingue nettement le réseau d'alvéoles hexagonales.

Api

Martino si era chiesto : perchè la forma esagonale ? Aveva l'impressione di averla già vista altrove. Ma si ! sulla calandra della macchina dello zio Gustavo, in certi edifici, osservati durante un viaggio a Chicago e su alcuni tessuti di cotone per asciugamani, per i quali, per l'appunto, si parla di tessuto a nido d'ape.

Economiques abeilles

Des applications en architecture de la structure en nids d'abeilles à des immeubles de Chicago.

Economiques abeilles

Calandre de voiture en nids d'abeilles : économique, ergonomique ou esthètique ?

Ma chi poteva essersi interessato ai favi ?

Si era posto la domanda qualche giorno prima. In casa, nessuno aveva saputo rispondere ad una domanda così particolare.

Com'era solito fare in questi casi, era corso da un vicino, Remo, che aveva fama nel quartiere di avere una risposta su tutto, o quasi.

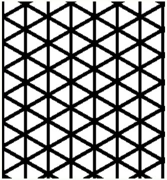
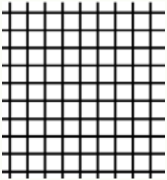
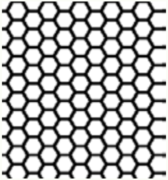
Api

Remo, un professore di filosofia in pensione, appassionato di scienza e di matematica in particolare, aveva spiegato a Martino che lo scopo principale dell'ape nella costruzione dei favi era il *risparmio di cera*.

Nei favi le api alloggiano le loro larve, le quali hanno forma grossolanamente cilindrica. Era quindi da escludersi il triangolo equilatero e il quadrato, che avrebbero fatto perdere troppo spazio negli angoli tra le facce del prisma.

La forma esagonale, la sola restante tra quelle dei poligoni regolari riunibili per coprire il piano - Remo aveva detto a Martino che quest'affermazione è un teorema di matematica - è quella che meglio si presta per i suoi angoli ottusi.

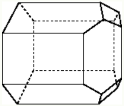
Economiques abeilles

Si l'on considère que l'aire de chaque polygone est égale à 1, alors le périmètre d'un triangle équilatéral est d'environ 4,56 et celui du carré 4. L'hexagone est donc bien des trois celui qui a le plus petit périmètre, avec 3,72 environ.

Favi

Le singole cellule sono dunque prismi cavi di cera e il fondo non è un piano perpendicolare alle costole delle cellule ; esso è invece costituito per ognuna di esse da tre losanghe uguali formanti una superficie concava.



Alvéole optimale trouvée par TOTH à condition que l'on considère l'épaisseur des parois comme nulle.

Perchè ? chiese Martino. Remo gli mostrò una pagina di calcoli, dicendo che era pronto a spiegarglieli.

Ma allora - si disse Martino - *anche le api fanno della matematica ?*

Remo non rispose direttamente alla domanda ma si limitò a richiamare la celebre frase di Galileo Galilei :

> *Il grande libro della natura è scritto con l'alfabeto della geometria...*

invitando Martino a conservare quest'osservazione preziosa del padre della fisica.

La sorpresa di Martino fu ancor più grande quando Remo aggiunse che anche gli angoli delle losanghe non sono completamente frutto del caso.

Cosa ancora più sorprendente, perfino il calcolo della misura di questi angoli ha la sua storia, che Remo raccontò a Martino.

Nel 1712, un astronomo all'osservatorio di Parigi, Maraldi, nipote di un Cassini - famiglia di astronomi francesi di origine italiana - aveva misurato con esattezza l'angolo delle losanghe delle cellule delle api trovando $109^\circ 28'$. Ciò che è curioso in questa storia è che Réaumur propose a un altro scienziato, il tedesco Samuel Koenig, senza comunicargli le misure del Maraldi, la ricerca della soluzione del problema seguente :

Fra tutte le cellule esagonali a fondo, composte di tre rombi uguali, determinare quella che può essere costruita col minimo di materia.

Koenig, con l'aiuto del calcolo diffrenziale, trovò nel 1739 che gli angoli della cellula di minima superficie debbono misurare $109^\circ 26'$ e $70^\circ 34'$.

Nel 1743 lo scozzese Colin Mac Laurin provò che il Koenig aveva commesso un errore nei suoi calcoli e che i valori giusti erano quelli indicati dal Maraldi.

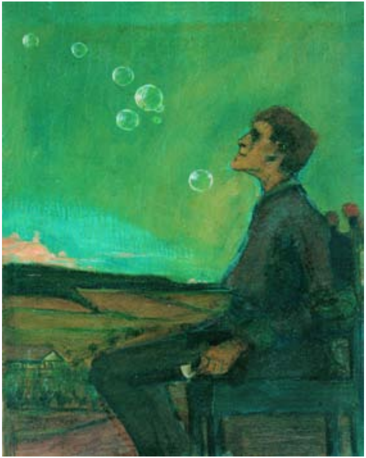
L'interesse per i favi non finì con il Mac Laurin. Altri scienziati si interessarono ai calcoli degli angoli : Lhuillier (1781), Lalanne (1840), Brougham (1848), Hennessy (1885-1886).

Peccato che le api stanno sparendo dalla Terra !..., si diceva Martino fra sé e sé, pensando al buon miele di Etienne e alle piante che, senza polline, non si sarebbero potute riprodurre più che alla matematica.

La sera, dopo cena, occorreva proprio rilassarsi un pò.

La vasca si era rapidamente riempita di bolle di sapone e Martino si divertiva con queste : soffiandovi talvolta delicatamente per farle volare, talvolta bruscamente per farle scoppiare.

Bulles d'Art



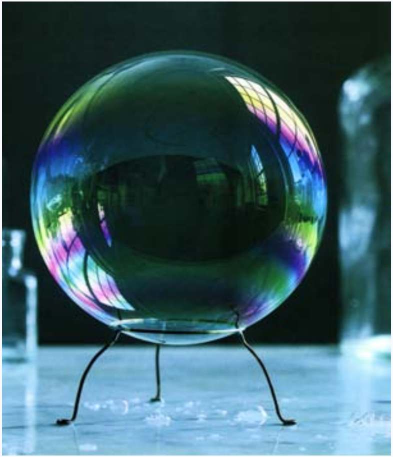
Autoportrait avec bulles de savon
Max BECKMANN - 1900

Les bulles de savon
Édouard MANET - 1867

Bolle di sapone

Guardava incuriosito il sapone, domandandosi, accarezzandolo, da dove poteva venire un tale oggetto, capace di fabbricare al contatto con l'acqua, queste bolle con le quali stava giocando.

Savonneux...



Les bulles de savon sont en fait de minces films d'eau limités par deux parois de particules de savon qui tournent leur tête hydrophile vers l'intérieur.

Era tardi per andare a importunare Remo con le sue domande ; e poi era troppo stanco. Preferì andarsi a coricare.

Non aveva ancora chiuso gli occhi e alcune domande gli gironzolavano ancora per la testa :

Di che materia è composto il sapone ?
Perchè il sapone lava ? Martino si poneva la domanda in quanto la mattina, a scuola, si era sporcato la camicia d'inchiostro.
Da dove proviene la schiuma del sapone ? Il piacere provato rilassandosi nella vasca piena di schiuma era ancora presente.
Per fare delle bolle, il sapone è veramente indispensabile ? Ad una festa di compleanno aveva visto delle bolle ; ma quelle erano bolle di champagne...
Come si fabbrica il sapone ?
Da dove proveniva la parola *bolla ?* Aveva qualcosa a che vedere anche con altre parole "vicine" come *bollo*, e il derivato *francobollo*, e poi *bollino, bolletta, bollettino, bollire, bullone,...*

Sapone

Con queste domande, Martino veramente stanco si addormentò.

Una dolce musica orientale lo accompagnò in sogno in un posto incantevole.

Fu così che si trovò ad Aleppo, in Siria.

Il sapone, forse, era nato proprio qui, circa tremila anni fa, miscuglio di olio di oliva e cenere.

Martino girava tra le bancarelle del mercato di Aleppo.

Savonneux...

Alep (Syrie)

I venditori gridavano vantando le qualità dei loro prodotti. Uno di questi, Nassim, interpellò Martino per vendergli un tessuto particolare. Era pieno di losanghe, le une unite alle altre per i vertici, il tutto circondato da altro tessuto a forma rettangolare, mentre i disegni stampati richiamavano ancora la forma della losanga. Insomma dei rombi dappertutto e nove fiocchi per completare il decoro.

Dei colori caldi conferivano al tessuto un bel aspetto. Martino lo vedeva già all'entrata della sua cameretta.

Contento, si decise a comprarlo. Mise la mano in tasca per prendere le monete richieste, quando si rese conto che non aveva la moneta locale. Si scusò più volte con Nassim ; questi lo guardò sbigottito e Martino, preso dal panico, fece un salto nello spazio e nel tempo, ritrovandosi in un altro mercato, questa volta a Marsiglia, l'altra patria del sapone.

Marsiglia, a partire dal XV secolo era già diventata un grande centro di fabbricazione del sapone, grazie alla grande produzione locale di olio d'oliva.

Savonneux...

Marseille (France)

Più tranquillo, Martino trovò il coraggio di chiedere ad un venditore di sapone che assomigliava a Remo, ma che di fatto si chiamava Laurent, di cosa era fatto il sapone.

L'alchimiste Karl SPITZWEG - 1860

Sapone

Laurent, alto, capelli lunghi, occhi spiritati e naso da pugile, rispose cortesemente che il suo sapone era una miscela di sego e cenere. Il suo sapone era, naturalmente, il miglior sapone di Marsiglia, il vero sapone di Marsiglia.

La cenere, Martino, la conosceva ; ce n'era tanta nel suo camino di casa, quando l'inverno si scaldavano le castagne. Ma cos'era il sego ?

Il sego, spiegò Laurent, era il grasso di equini, ovini e specialmente bovini. La parola proveniva dal latino, *sebum*, e designava la sostanza grassa secreta dalle ghiandole sebacee della cute.

Parlando, Laurent soffiò con una cannuccia sul sapone e un'enorme bolla si formò.

Martino le corse dietro tanto tempo. Non si può dire quanto, perchè nei sogni la nozione del tempo probabilmente non è la stessa di quando siamo svegli.

Fatto sta che Martino si ritrovò a Monaco, nella Baviera, vicino uno stadio olimpico. Un grande cartello indicava l'anno : 1972.

La bolla scivolò facilmente dal tetto dello stadio fino a rimbalzare per terra, per poi fermarsi vicino a Martino. Dall'altra parte della bolla un uomo con una valigia in mano sorrideva e Martino gli chiese chi era.

Buongiorno, mi chiamo Frei Otto ; Frei Otto in persona !

Il est libre Otto !

Frei OTTO, architecte allemand né en 1925, a renouvelé son art en introduisant des structures légères de toiles tendues par des fils métalliques. Ses réalisations les plus connues sont le Pavillon Allemand lors de l'Exposition Universelle de 1967 et le Stade Olympique de Munich pour les Jeux de 1972.

Martino si scusò dicendogli che non si erano mai incontrati prima di quella volta. L'uomo non si scompose e gli disse che era un architetto, l'architetto che aveva concepito lo stadio, grazie al sapone o, meglio, alle lamine saponate.

Martino continuava a non capire cosa gli stava succedendo. Lasciò per un pò perdere la bolla di sapone di Laurent e s'interessò al nuovo personaggio.

Frei Otto aprì la valigia e mostrò dei telai in fil di ferro. Dalla valigia tirò fuori una bacinella. Senza esitare andò a riempirla d'acqua ad una fontanella poco distante.

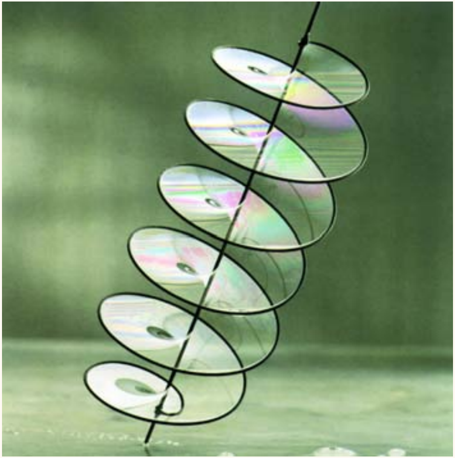
Sul fondo aveva versato qualche goccia di sapone ; così in poco tempo si formò una schiuma.

Martino si chiedeva cosa sarebbe successo.

Otto immerse allora i telai, uno alla volta. Ogni volta uscivano fuori delle belle strutture : le lamine saponate appoggiate al contorno offerto dal fil di ferro.

Martino era sorpreso ; non capiva dov'era l'interesse dell'esperimento, a parte la bellezza delle lamine.

Mini, mini, mini...



Une des premières surfaces minimales découverte, l'hélicoïde. La molécule d'ADN épouse justement cette forme... Un intérêt naturel à l'économie ?

POUR ADMIRER UNE CATÉNOÏDE, FAITES L'EXPÉRIENCE SUIVANTE :

1. Plongez l'un au dessus de l'autre deux contours circulaires dans de l'eau savonneuse.
2. Retirez-les ensemble.
3. Écartez-les en les laissant parallèles.

Un film savonneux se forme, s'incurve si on éloigne les contours, obtenant ainsi une caténoïde. Si on écarte trop... le film éclate !

Otto prese allora un fil di ferro in forma circolare e lo immerse. All'uscita ottenne una lamina a forma di disco. Chiese a Martino cosa suggeriva un'esperienza simile, più semplice delle altre.

L'argomento era veramente difficile : cosa pensare ?

Martino si ricordò soltanto che aveva visto dei cavatappi a forma d'elicoide e dei camini di centrale nucleare a forma di catenoide.

Mini, mini, mini...

Otto tirò allora fuori due placche metalliche parallele unite da due viti e le immerse. Il liquido formò una lamina tra le due viti e Otto chiese a Martino cosa poteva pensare in quel momento se la lamina rappresentava il cammino per andare dalla prima alla seconda vite.

Si ricordò allora che aveva appreso a scuola che il segmento di retta era il cammino più corto tra due punti.

Bravo ! Disse Otto. Andiamo ancora più in là.

Otto tirò fuori questa volta un fil di ferro a forma di ferro di cavallo, con una cordicella legata alle due estremità. Li immerse nel liquido. Uscì fuori una specie di *luna*. Otto tirò la cordicella verso l'esterno, ma la cordicella tornò nella posizione iniziale. Poi chiese a Martino : prima abbiamo ridotto il cammino tra i due punti ; adesso cosa pensi che abbiamo ridotto ?

In sogno succede di tutto ; anche che si abbiano delle bellissime intuizioni.

Fu allora che Martino rispose : *l'area !*

Hai capito tutto, aggiunse Otto. Tramite i telai ho potuto capire come minimizzare l'area una volta fissato il contorno. La superficie che si ottiene è chiamata *superficie minima*. È in questo modo che ho potuto progettare lo stadio di Monaco.

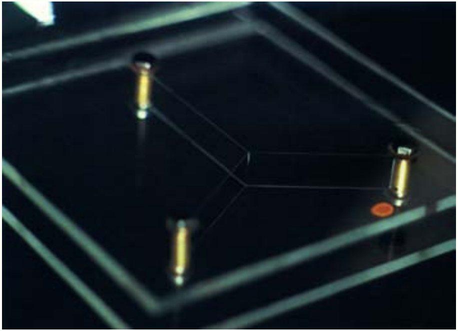
LA CONSTRUCTION DE L'INSTITUT DES STRUCTURES LÉGÈRES DE STUTTGART EN QUELQUES ÉTAPES

1. Prendre une structure en fils fins soutenue par des aiguilles ou des bâtonnets à hauteur réglable et la plonger dans un liquide savonneux.
2. En la sortant du liquide, un film de savon, surface minimale, se forme et épouse le contour de la structure. Si le film ne se rompt pas spontanément, c'est qu'il est stable.
3. Les études architecturales et techniques peuvent s'engager...

Poi estrasse dalla valigetta due placche metalliche parallele unite questa volta da tre viti chiedendo a Martino cosa sarebbe potuto succedere immergendole nel liquido.

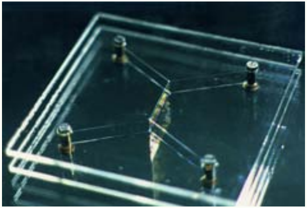
Martino fece varie congetture : un cerchio, si corresse subito e pensò al triangolo, ...

Otto immerse il telaio e videro una forma nuova.



La solution savonneuse du problème à 3 points. Géométriquement ce dernier a été résolu par l'italien Evangelista TORRICELLI (1608-1647), à qui nous devons aussi le thermomètre.

Ripetettero l'esperienza con quattro viti sui vertici di un quadrato. Naturalmente la strada per le domande era aperta : cosa sarebbe successo con cinque, sei, sette,...viti ?



Expérience avec quatre points situés aux sommets d'un carré. Le film de savon se place naturellement dans la configuration minimale. Se voyant ainsi suggérer une solution, un raisonnement géométrique guidé pourra alors tenter de la valider. Difficulté supplémentaire, il existe des solutions distinctes... Imaginons alors ce qui pourrait se produire avec 27 points !

Frei Otto salutò Martino, dicendogli che doveva andare all'inaugurazione dello stadio.

In quel preciso momento, dietro la bolla di sapone dimenticata da una parte, apparve l'ombra di Jacob Steiner.

Steiner era un matematico svizzero, che si era posto al XIX secolo problemi di questo tipo, conosciuti anche come *problemi di ottimizzazione*.

Jakob STEINER (1796-1863), mathématicien suisse et brillant géomètre, a apporté une importante contribution à l'étude des surfaces, des courbes et des problèmes d'optimisation.

Steiner chiese a Martino qual'era tra tutte le curve chiuse, di perimetro dato, che delimitano una regione del piano, quella di area massima. Così dicendo gettò una corda ai piedi di Martino per farlo cercare ; la corda sostituiva la curva.

Poi Steiner con tono ispirato raccontò la leggenda di Didone.

Didone era regina di Tiro, antica città della Fenicia, nel Libano meridionale. Moglie di Sicheo questi fu ucciso dal fratello Pigmalione.

Martino domandò a Steiner se quest'ultimo aveva qualcosa a che vedere con l'aggettivo *pigmalione*.

Steiner non rispose, ma si chiese, fra sé e sé, se il Pigmalione libanese aveva a che fare con il mitico re di Cipro che, innamoratosi di una statua muliebre da lui stesso fatta, una volta divenuta viva la sposò, donde l'aggettivo usato comunemente...

Steiner riprese il racconto di Didone seguendo quello dell'Eneide di Virgilio. Durante il nono secolo av.C., la regina, scacciata dal cognato, fuggì sulle coste africane dove comprò al re Iarbas una terra per potersi stabilire con il suo popolo.

Per evitare un flusso di emigrazione troppo importante - le preoccupazioni di oggi non sono nuove - diede a Didone una porzione di terra grande quanto la pelle di un bue.

Didone fece tagliare la pelle in fini lamelle in modo tale da formare una lunghissima corda che misurava tra i 1000 e i 2000 metri. Poi mise la corda al suolo in modo tale che delimitasse una regione di area massima.

Didone comprese sicuramente che la soluzione è un cerchio, che delimita con il perimetro dato, una superficie tra i 10 e i 20 ettari.

Sempre secondo la leggenda, Didone fece ancora meglio, in quanto fece fissare gli estremi della corda alla costa - supposto rettilinea - in modo tale da ottenere un enorme semi-cerchio.

Colonia, città tedesca della Renania settentrionale-Vestfalia, sul Reno, di origine romana, *Colonia Agrippinensis*, può dare un'idea dello stratagemma di Didone :

Plan médiéval de la ville de Cologne

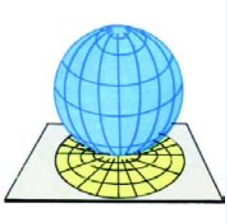
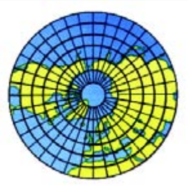
Quelle que soit l'époque, la méthode de DIDON a fait des émules. La construction de la ville de Cologne reprend même exactement son idée : en s'appuyant sur le tracé quasi-rectiligne du Rhin, une forme semicirculaire optimise la superficie de la ville. Toutefois une interrogation demeure...

Martino era perduto : Steiner era sparito nel nulla e lui aveva la sgradevole sensazione, tipica di certi sogni, di non sapere più dove si trovasse.

In quel momento il sole estivo picchiava e proiettava sul suolo l'ombra della bolla di sapone di Laurent.

Fu allora che Martino si ricordò che quell'immagine gli richiamava qualcosa vista su un quaderno di suo fratello, Gabriele, studente universitario : *la proiezione stereografica*. Ogni punto del globo terrestre è mandato su un punto di un piano, tramite la retta passante per il polo di proiezione e il punto proiettato.

Et pourtant, elle est ronde !

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE
Chaque point du globe est envoyé à l'intersection du plan et de la droite passant par le pôle et le point projeté.

Gabriele aveva spiegato a Martino che molti scienziati si erano interessati alle carte geografiche, cioè data una sfera come rappresentarla correttamente nel piano ; per esempio, il geografo fiammingo Mercatore, nome italianizzato di Gerhard Kremer e Johann Heinrich Lambert vissuti rispettivamente nel XVI e nel XVIII secolo.
Gabriele tenne a menzionare uno dei più grandi matematici di tutti i tempi Karl Fiedrich Gauss, nato nel 1777 e morto nel 1855, studioso di geometria e interessato anche lui ai problemi della cartografia.

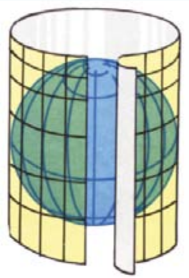
Et pourtant, elle est ronde !

Gérard KREMER (1512 - 1594), passé à la postérité sous le nom de MERCATOR, mathématicien et géographe flamand, est à l'origine de la projection cartographique qui a révolutionné les transports maritimes.

Jean-Henri LAMBERT (1728 - 1777), mathématicien et physicien français, a laissé son nom au mode de projection retenu pour les latitudes moyennes comme celles de la France.

Il Mercatore aveva avuto l'idea della proiezione cilindrica :

Et pourtant, elle est ronde !

PROJECTION CYLINDRIQUE

Chaque point du globe est envoyé sur un cylindre tangent à l'équateur en suivant les rayons de la sphère. Le cylindre est ensuite déroulé pour obtenir la carte.

Mentre ripensava alle parole del fratello, Martino fu scosso da un pallone tirato da un gruppetto di giovani poco distanti.

Lo prese al volo, questione di avere un oggetto familiare tra le mani, guardandolo attentamente.

Vide allora che sul pallone c'erano pentagoni neri ed esagoni bianchi.

Ballon de football des années 80 : exactement 12 pentagones et 20 hexagones.

In quel momento si ricordò della lezione sui poliedri regolari e la dimostrazione dell'esistenza di solamente cinque poliedri regolari : il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro e della bella formula di Eulero :

$$F + V - S = 2$$

semplice e profonda nello stesso tempo. La professoressa suggeriva per ricordarsela : *Fatti Vedere Sabato alle 2*, dove invece F sta per il numero delle **Facce**, V per quello dei **Vertici** e S per il numero degli **Spigoli** di un dato poliedro.

Nel caso del pallone, se lo si tiene con un pentagono nella mano, ce n'è un altro in alto e gli altri pentagoni formano due cinture di cinque pentagoni ciascuna ; quindi ci sono in tutto

$$1 + 1 + 5 + 5 = 12 \text{ pentagoni.}$$

Per contare gli esagoni, utilizziamo i dodici pentagoni. Ogni esagono ha esattamente 3 pentagoni come *vicini*. Quindi ogni esagono è contato 3 volte. Abbiamo allora :

$$12 \times \frac{5}{3} = 20$$

uguaglianza che fornisce il numero di esagoni. Dalla formula di Eulero si può quindi dedurre che ci sono 32 + 60 - 2 = 90 spigoli.

Un moscone venne a gironzolare sul naso di Martino. Questi fece un gesto nel letto come per scacciarlo e continuare a dormire.

Nel sogno restituì il pallone ai giovani che lo misero da parte per fare dello skate-board. Il profilo della rampa aveva una forma particolare.

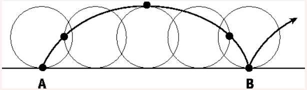
Martino si chiedeva perchè la rampa aveva quella forma e non la rettilinea, visto che è la retta il cammino più corto tra due punti.

Perchè ?

Brachistochrone

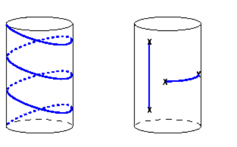
Alors, cette rampe de skate-board, cycloïde, clothoïde ou autre ?

Ebbe allora l'intuizione che la retta è il cammino più rapido in assenza della forza di gravità, ma che in presenza di questa le cose dovevano andar diversamente. Uno dei giovani, interrogato da Martino, gli disse che stava facendo dello skateboard su una curva chiamata *cicloide*.



Trajectoire de la valve d'une roue de vélo roulant sans glisser.

Ripensò poi al piano e al segmento di retta che unisce due punti. Vedendo in quel momento un palazzo in forma circolare si chiese : e su un cilindro qual'è il cammino più corto ? E su un cono ?



Les géodésiques d'un cylindre sont généralement des hélices progressant régulièrement. Cas particulier : le plus court chemin entre deux points situés sur une même verticale est un segment ; le plus court chemin entre deux points situés sur une même horizontale est un arc de cercle.

Tutte queste considerazioni avevano suscitato in lui un certo appetito e fu con piacere che Martino si avvicinò ad un negozio di frutta.

Delle belle mele avevano attirato la sua attenzione. Mentre ne mangiava una, osservò le arance. Non sembravano disposte a caso. Chiese al negoziante se le aveva sovrapposte seguendo un criterio particolare. Il negoziante gli rispose che un giorno un matematico si era fermato a far spesa e gli aveva spiegato *il problema di Keplero*.

Keplero ? Si Keplero, l'astronomo, per intendersi.

Nel 1609, Keplero si era posto il problema di qual'era la sovrapposizione più compatta per le arance, pardon ! per le sfere.

L'orange du marchand ?

STRUCTURE HEXAGONALE COMPACTE

1. Les centres forment un réseau hexagonal.
2. Une seconde couche identique est placée.
3. Les centres viennent se superposer à la verticale des vides laissés libres dans la première couche.

Il se trouve que les empilements de sphères modélisent parfaitement la structure cristalline de la majorité des métaux. Ainsi les atomes de l'aluminium ou du cuivre s'agencent entre eux suivant une structure hexagonale compacte tandis que le césium par exemple respecte une structure

STRUCTURE CUBIQUE CENTRÉE

1. Les centres forment un réseau carré.
2. Une unique possibilité de placement.
3. Encore une unique possibilité par couche similaire aux précédentes. cubique centrée. Et oui, les empilements doivent être aussi compacts que possible... Effets des interactions électrostatiques.

Grazie in un certo senso ai negozianti di frutta e verdura, il problema si riduceva a chiedersi se per lo spazio infinito ordinario fosse la struttura esagonale oppure quella cubica la più compatta. La risposta è arrivata qualche anno fa, grazie al matematico Thomas Hales che ha dimostrato soltanto in un centinaio di pagine... che la struttura esagonale è la migliore.

Il caldo cominciava a farsi sentire in questa serata d'estate.

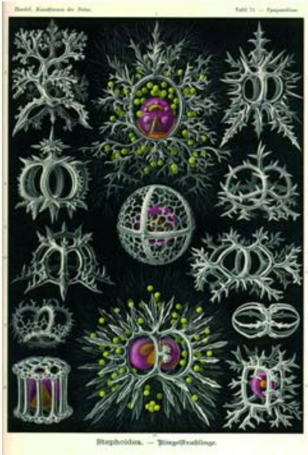
Martino, ancora profondemente addormentato, era vicino ad una fontana.

Il rumore dell'acqua gli ricordava quello del mare.

Strane entità cominciavano ad attraversare i sogni di Martino, che si girava e rigirava nel letto.

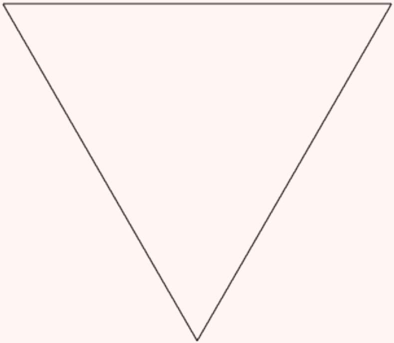
Radiolari di ogni forma. Aveva letto che lo zoologo Ernst Haeckel ne aveva classificato circa 785 specie a partire da criteri geometrici. I radiolari sono questi protozoi marini dal corpo protetto da un involucro minerale per lo più siliceo.

Ici londe !

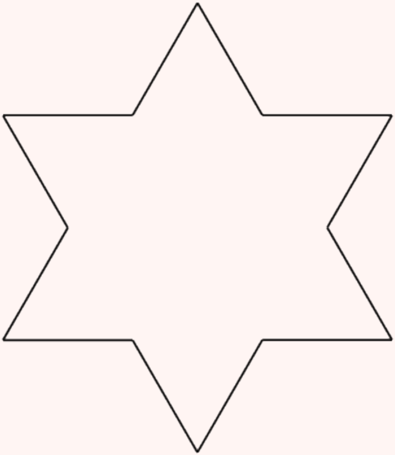


Extrait d'une des planches lithographiées de Ernst HAECKEL : quelques exemples de squelettes de radiolaires.

Frattali, forme geometriche stranissime nella loro ripetizione, presenti nei fiocchi di neve, nei polmoni, in certe piante che Martino coltivava nel suo giardino, nei fulmini,... La parola era stata coniata nel 1975 dal matematico francese Benoit Mandelbrot e proveniva dal latino *fractus*, spezzato. Queste figure geometriche, dotate di simmetrie interne a qualsiasi scala si ingrandiscano, sono ottenute come configurazioni limite di una successione di curve spezzate ; da ognuna si ottiene la successiva in base ad una regola assegnata, per esempio sostituendo a ogni lato una linea spezzata prefissata detta generatore.

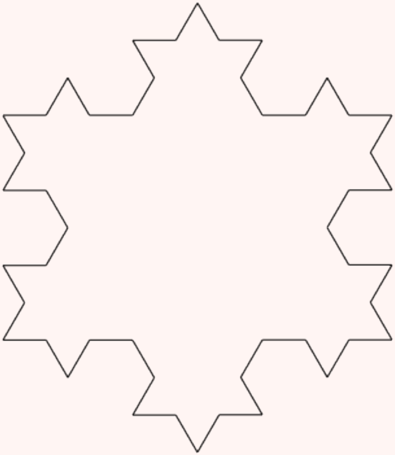


Flocon de Van Koch



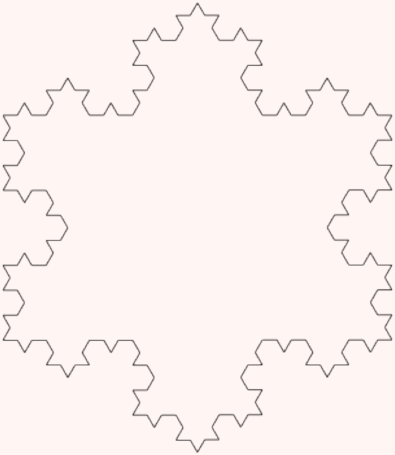
Flocon de Van Koch

Fractales...



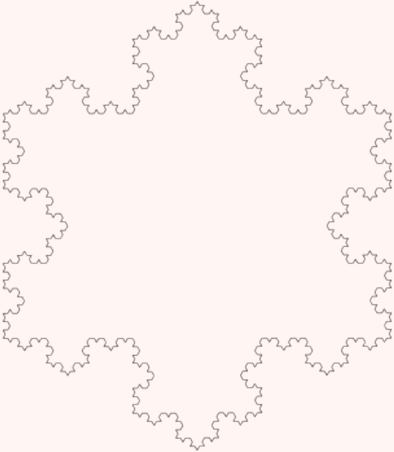
Flocon de Van Koch

Fractales...

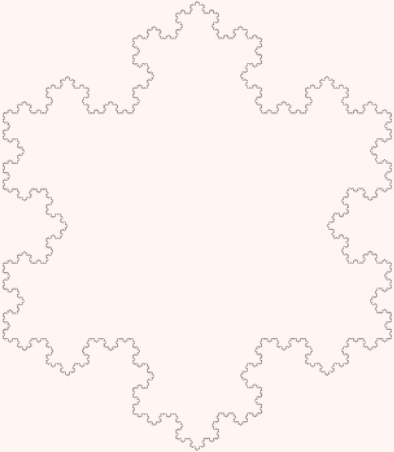


Flocon de Van Koch

Fractales...

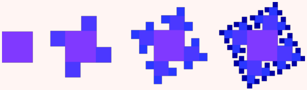


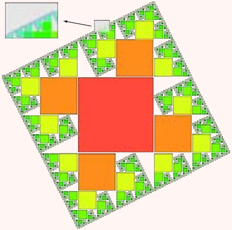
Flocon de Van Koch



Flocon de Van Koch

Fractales...





CONSTRUISONS UNE FRACTALE PAS À PAS

1. Partons d'un carré.

2. Sur chacun de ses côtés, plaçons un autre carré dont la longueur du côté est de moitié celle du carré initial.

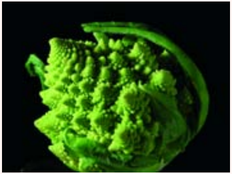
3. Sur chacun des côtés des nouveaux carrés, recommençons pour créer trois carrés de côté moitié celui précédent.

4. Poursuivons ainsi de suite... Le périmètre de la figure obtenue tend vers l'infini tandis que son aire est limitée par celle d'un grand carré. Une figure d'aire finie mais de périmètre infini... surprenant !

Fractales...

Un flocon de neige vu au microscope : on distingue nettement les embranchements à 120° ou 60° qui forment une arborescence fractale. 120°... minimisation des longueurs ?

Moulage de poumons humains : en bleu, le sang veineux, en rouge le sang artériel, en blanc l'air dans l'arbre bronchique. Comment maximiser la surface de contact air-sang dans un volume réduit ?



Une variété de chou particulièrement fractale : le chou Romanesco.

Incubo

Pianeti, asteroidi e ogni sorta di corpi celesti di forma sferica o quasi...

Ainsi rond, rond, rond...

Jupiter et quatre de ses lunes... des boules presque parfaites.

Il sogno di Martino si stava trasformando in incubo quando una bambina, Matilde, gli si avvicinò e con fare sicuro gli declamò una poesia :

Osserva bene fanciullo i piccoli globi di sapone :
il loro movimento così mutevole,
e il loro splendore così poco duraturo
ti faranno dire a ragione
che la cangiante Iride è molto simile ad essi

oppure, in rima, nella lingua originale di Pierre Filloeul :

Contemple bien jeune Garçon,
Ces petits globes de Savon :
Leur mouvement si variable
Et leur éclat si peu durable
Te feront dire avec raison,
qu'en cela mainte Iris leur est assez semblable.

Martino si svegliò di soprassalto. Un colpo di vento aveva aperto la finestra ... Si stropicciò gli occhi, si sedette sul letto e si guardò intorno stiracchiandosi, contendo e felice perchè un'altra giornata diversa dalle altre stava per cominciare...

Bulles de savon Jean-Baptiste Siméon CHARDIN - 1734

Bibliografia

- Marta CAZZANELLI, Katuscia SORARUF e Italo TAMANINI, *Matematica e bolle di sapone*, Fascicolo del Laboratorio di Ricerca sui Materiali e i Metodi per la Didattica e la Divulgazione della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Trento, Dicembre 2001.
- Richard COURANT e Herbert ROBBINS, *Che cosa è la matematica ?*, Seconda edizione riveduta da Ian Stewart, Universale Bollati Boringhieri, 2000.
- Pierre-Gilles DE GENNES, Françoise BROCHARD-WYART e David QUÉRÉ, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin, 2002.
- Michele EMMER, *Bolle di sapone, Un viaggio tra arte, scienza e fantasia*, La Nuova Italia, 1991.
- Italo GHERSI, *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, 1996.
- Stefan HILDEBRANDT e Anthony TROMBA, *MATHÉMATIQUES ET FORMES OPTIMALES*, Belin, 1986.
- Françoise PÉCAUT, *Pavés et Bulles*, Publication de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 1977.
- *lo ZINGARELLI*, Vocabolario della lingua italiana, zanichelli, 2000.