- Ising primi vicini, $d=2$, $h=0$

c'è una famosa soluzione "esatta" di Onsager
calcola esattamente pressione con un argomento
di "matrice di trasferimento" - solo che
sono matrici non 2×2 ma $n\times n$ (se volume è cubo lato n)
In particolare trova esattamente J_c

~~Metodi algebrici~~

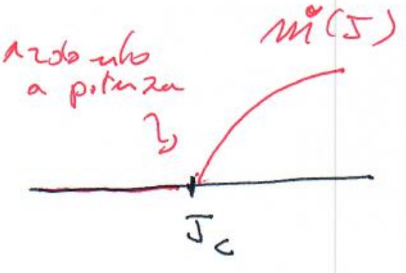
Un capitolo della meccanica statistica è quello
dei "modelli risolubili", ~~che sono tutti~~ nati
a partire dalla soluzione di Onsager di Ising $d=2$

Non in questo corso. Metodi algebrici.

La soluzione di Onsager è solo per $h=0$, ma
riesce lo stesso a trovare una formula esplicita
per la magnetizzazione spontanea

~~$m^*(\beta) = \lim_{h\downarrow 0}$~~

$$m^*(J) = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^2} \mu^{+}_{\Lambda}(\sigma_0)$$



- Usando l'autodualità di $\mathbb{Z}^2$ un argomento di simmetria permette di trovare "facilmente" $J_c(2)$

- Ising $d > 2$ $h=0$, transizioni di fase ?

Magari anche il caso non a primi vicini ma ferromagnetico ($J_{xy} \geq 0$)

Via disuguaglianze lo ricaviamo da $d=2$, primi vicini.

~~Ising~~

$$H_\Lambda(\sigma|+) = - \sum_{\substack{\{x,y\} \\ |x-y|=1}} J_{\{x,y\}} \sigma_x \sigma_y$$

convengo $\sigma_x = +$ se $x \notin \Lambda$

[non necessariamente ~~~~ invariante per traslazioni]

<u>TEO</u> (Disuguaglianza di Griffith) se $J_{x,y} \geq 0$

$$\mu^+_\Lambda(\sigma_0) \nearrow \text{ rispetto a ogni } J_{x,y} \quad \underbrace{\{x,y\}}_{} \hat{\cap} \Lambda \neq \emptyset$$

coppie di primi vicini

Come corollario

$$\mu^+_\Lambda(\sigma_0)\Big|_{d=3} \geq \mu^+_{\Lambda}(\sigma_0)\Big|_{d=2}$$

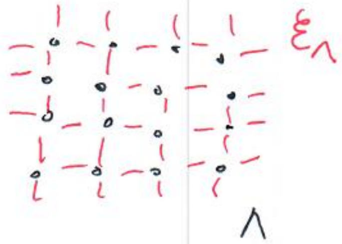
vuol dire lo stesso ovvio

In particolare

$$J_c(d) \searrow d$$

Funziona anche nel caso non a primi vicini dim

$$\mathcal{E}_\Lambda = \{ \{x,y\} \cap \Lambda \neq \emptyset \quad |x-y| = 1 \}$$



$$\underline{J} = \{ J_{\{x,y\}} \, , \ \{x,y\} \in \mathcal{E}_\Lambda \}$$

$$m(\underline{J}) = \mu^+_\Lambda(\sigma_0)$$

$$= \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \sigma_0 \, e^{\sum_{\{x,y\} \in \mathcal{E}_\Lambda} J_{\{x,y\}} \sigma_x \sigma_y}}{\sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} e^{\sum_{\{x,y\} \in \mathcal{E}_\Lambda} J_{\{x,y\}} \sigma_x \sigma_y}}$$

convengo $\sigma_x = +$ se $x \notin \Lambda$

l'affermazione è quindi: ~~∀~~ $\forall \{x,y\} \in \mathcal{E}_\Lambda$

$$\frac{\partial}{\partial J_{\{x,y\}}} m(\underline{J}) \geq 0 \qquad \text{se} \qquad \underline{J} \in [0, +\infty)^{\mathcal{E}_\Lambda}$$

per calcolo diretto

covarianza

$$\frac{\partial}{\partial J_{\{x,y\}}} m(\underline{J}) = \mu^+_\Lambda(\sigma_0, \sigma_x \sigma_y)$$

$$= \frac{1}{(Z^+_\Lambda)^2} \sum_{\sigma, \tau \in \Omega_\Lambda} \sigma_0 (\sigma_x \sigma_y - \tau_x \tau_y) \, e^{\sum_{\{x',y'\} \in \mathcal{E}_\Lambda} J_{\{x',y'\}} (\sigma_{x'} \sigma_{y'} + \tau_{x'} \tau_{y'})}$$

Dato $\sigma \in \Omega_\Lambda$ sia $\eta \in \Omega_\Lambda$ definita da

$$\eta_x = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau_x = \sigma_x \\ -1 & \tau_x \neq \sigma_x \end{cases}$$

evidentemente $\tau \leftrightarrow \eta$.

$$\frac{\partial}{\partial J_{\{x,y\}}} m(\underline{J}) = \frac{1}{(Z_\Lambda^+)^2} \sum_{\sigma,\eta\in\Omega_\Lambda} \sigma_0\sigma_x\sigma_y (1-\eta_x\eta_y)$$

$$\cdot \exp\Big\{ \sum_{\{x',y'\}\in\mathcal{E}_\Lambda} J_{\{x,y\}} \sigma_{x'}\sigma_{y'}(1+\eta_{x'}\eta_{y'}) \Big\}$$

$$= \frac{1}{(Z_\Lambda^+)} \sum_{\eta\in\Omega_\Lambda} \overbrace{(1-\eta_x\eta_y)}^{\geq 0} \underbrace{\frac{1}{Z_\Lambda^+}\sum_\sigma \sigma_0\sigma_x\sigma_y\, e^{\sum_{\{x',y'\}\in\mathcal{E}_\Lambda} J_{\{x',y'\}}(1+\eta_{x'}\eta_{y'})\cdot\sigma_{x'}\sigma_{y'}}}$$

$$= \tilde{\mu}_\Lambda^+(\sigma_0\sigma_x\sigma_y)$$

con ~~il [illegible]~~ Ising con costanti di accoppiamento $\underbrace{J_{\{x,y\}}(1+\eta_x\eta_y)}_{\geq 0}$

<u>Lemma</u> se $\underline{J} \in [0,+\infty)^{\mathcal{E}_\Lambda}$

$\forall \{x,y\}\in\mathcal{E}_\Lambda$

$$\mu_\Lambda^+(\sigma_0\sigma_x\sigma_y) \geq 0$$

<u>dim</u> basta

convengo $\sigma_x = +$
$\forall x \notin \Lambda$

$$\underline{\sum_{\sigma\in\Omega_\Lambda}} \sigma_0\sigma_x\sigma_y\, e^{\sum_{\{x',y'\}\in\mathcal{E}_\Lambda} J_{\{x',y'\}}\sigma_{x'}\sigma_{y'}} \geq 0$$

sviluppo l'esponenziale

$$= \sum_{\sigma\in\Omega_\Lambda} \sigma_0\sigma_x\sigma_y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\sum_{\{x',y'\}\in\mathcal{E}_\Lambda} J_{\{x',y'\}}\sigma_{x'}\sigma_{y'}\Big)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Omega_\Lambda} \sigma_0 \sigma_x \sigma_y \sum_{\substack{\{x_1, y_1\} \in \mathcal{E}_\Lambda \\ \vdots \\ \{x_n, y_n\} \in \mathcal{E}_\Lambda}} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} J_{\{x_i, y_i\}} \right)}_{\geq 0} \cdot \prod_{i=1}^{n} \sigma_{x_i} \sigma_{y_i}$$

Fissa $z \in \Lambda$. Quante volte appare σ_z ?

se un numero dispari di volte

il tutto viene 0 per la simmetria

$$\sigma_z \to - \sigma_z$$

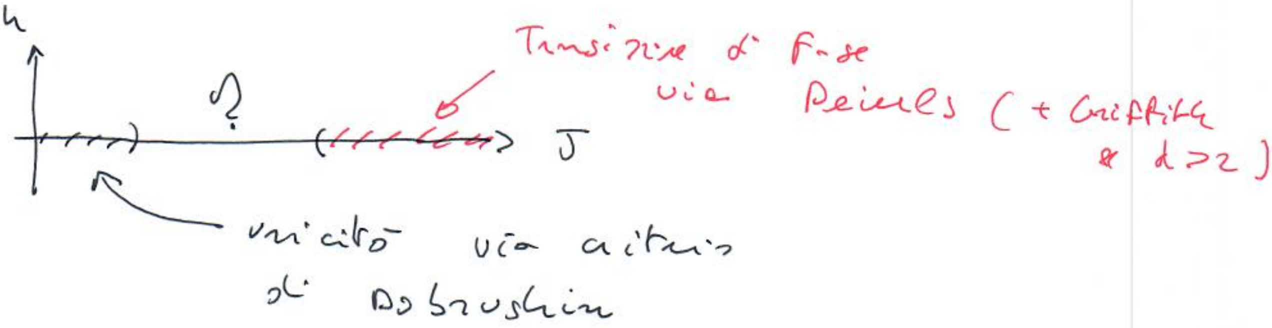
Rimangono solo i termini in cui ogni σ_z appare un numero pari di volte

$\Rightarrow$ il tutto è ≥ 0

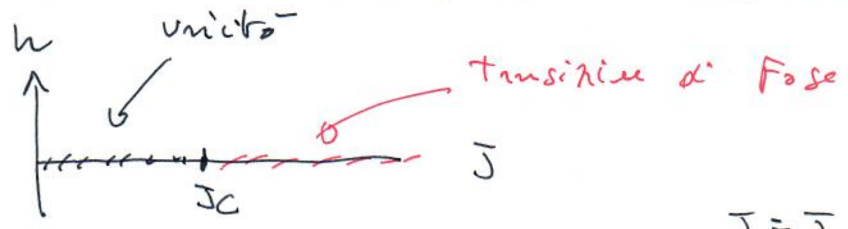
ORDINE STOCASTICO E DISEGUAGLIANZE FKG
(FORTUIN – KASTELEYN – GINIBRE)

• Diagramma di fase per Ising $d \geq 2$, $h = 0$

per ora sappiamo



in effetti la situazione è dicotomica



$J = J_c$?

(è ancora un problema aperto $d = 3$)

dipende da altre diseguaglianze di correlazione (FKG)
Nate nella meccanica statistica (in particolare per Ising) ma ora di uso comune ~~la~~ anche in altri campi. Parte della discussione sarà quindi generale.

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ fissato (Per un po' non c'è differenza tra $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ o $|\Lambda| = +\infty$)

$\Omega = \Omega_\Lambda = \{-1, 1\}$

su Ω introduco un ordine parziale $\leq$ dichiarando

$$\sigma \leq \sigma' \iff \sigma_x \leq \sigma'_x \quad \forall x \in \Lambda$$

riflessivo, transitivo, antisimmetrico ($\sigma \leq \sigma'$ $\sigma' \leq \sigma \Rightarrow \sigma = \sigma'$)

[ordine totale se fosse comunque una una delle due $\sigma \leq \sigma'$ oppure $\sigma' \leq \sigma$

questo non è il caso]

~~OSS~~

~~Esercizio~~. ~~Se $\Omega = \{0,1\}^\Lambda$ famiglia dei sottoinsiemi~~

~~$\Omega \ni \sigma \Leftrightarrow \{A \subset \Lambda\} \in \mathcal{P}(\Lambda)$~~

Esercizio

Data $\sigma \in \Omega$ sia $A = A(\sigma) = \{x \in \Lambda : \sigma_x = 1\}$

(i) $\sigma \to A(\sigma)$ è biiezione da Ω a $\mathcal{P}(\Lambda)$ = sottoinsiemi di Λ

(ii) $\sigma \leq \sigma' \iff A(\sigma) \subset A(\sigma')$

(iii) $\subset$ (inclusione di insiemi) è un ordine parziale in $\mathcal{P}(\Lambda)$

Dato $(\Omega, \leq)$ ho naturalmente il concetto di funzioni monotone

Sia

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \boxed{f \nearrow \quad \text{sse} \quad \sigma \leq \sigma' \Rightarrow f(\sigma) \leq f(\sigma')}$

Avendo deciso chi siano le $f \nearrow$, ho un ordine (parziale) naturale sulle probabilità su Ω

$\mathcal{P}(\Omega)$ = prob. su Ω

$$\mu \leq \nu \quad \text{sse} \quad \mu(f) \leq \nu(f) \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(\Omega) \quad f \nearrow$$

b in generale

Esercizio $\leq$ è un ordine parziale su $\mathcal{P}(\Omega)$

OSS $f(\sigma) = \sigma_0$ è $\nearrow$ sarà proprio utile sapere quando $\mu(\sigma_0) \leq \nu(\sigma_0)$

$f(\sigma) = \sigma_x \sigma_y$ non è $\nearrow$

ma $f(\sigma) = \underbrace{\frac{1+\sigma_x}{2}}_{=0,1} \underbrace{\frac{1+\sigma_y}{2}}_{=0,1}$ è $\nearrow$

usiamo "gas reticolare" invece che spin

Def Date μ e $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ ~~un coupling~~

un accoppiamento di μ e ν (o rappresentazione congiunta)

è una probabilità $Q \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$

con marginali μ e ν:

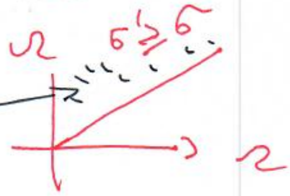
$$Q(\cdot \times \Omega) = \mu$$
$$Q(\Omega \times \cdot) = \nu$$

Teo

$\mu \le \nu \iff \exists\, Q$ accoppiamento t.c. $Q(\sigma \le \sigma') = 1$

Q è "sopra la diagonale"

Q carica solo questi punti



dim

$\Leftarrow$ (solo)

Q è un accoppiamento

$$\mu(f) - \nu(f) = \int Q(d\sigma, d\sigma') \, [\, f(\sigma) - f(\sigma') \,]$$

Q è sopra la diagonale

$$= \int_{\sigma \le \sigma'} Q(d\sigma, d\sigma') \, \underline{[\, f(\sigma) - f(\sigma') \,]}$$

≤ 0 se $f \uparrow$

$\Rightarrow$ Q si costruisce via Hahn-Banach e Riesz

COR

$\mu \le \nu$

μ e ν stessi 1 marginali $\Rightarrow \mu = \nu$

$\mu(\sigma_x = 1) = \nu(\sigma_x = 1) \quad \forall x \in \Lambda$

• È chiaro che senza la condizione $\mu \le \nu$ il fatto che μ e ν abbiano gli stessi 1-marginali è molto lontano dall'implicare $\mu = \nu$

dim $\mu \le \nu \Rightarrow \exists\, Q$ sopra la diagonale

(μ e ν stessi 1-marginali) $\Rightarrow Q$ è sulla diagonale $\Rightarrow \mu = \nu$

in formule

Q accoppiamento di μ, ν sopra la diagonale

Dato $x \in \Lambda$

$$Q(\{(\sigma,\sigma') : \sigma_x < \sigma'_x\})$$

$$= Q(\{(\sigma,\sigma') : \sigma_x = -1, \sigma'_x = 1\})$$

$$= Q(\sigma_x = -, \sigma'_x = +) + Q(\sigma_x = +, \sigma'_x = +)$$

$$- Q(\sigma_x = +, \sigma'_x = +) - \underbrace{Q(\sigma_x = +, \sigma'_x = -)}_{= 0}$$

0 $\Leftarrow$ Q sopra la diagonale

$$= Q(\sigma'_x = +) - Q(\sigma_x = +)$$

$$= \nu(\sigma_x = +) - \mu(\sigma_x = +) = 0$$

$\Leftarrow$ μ e ν stessi 1-marginali

Facendo intersezione ~~...~~ (numerabile o finita) di eventi di probabilità 0

RICAVO

$$Q(\sigma \neq \sigma') = 0 \implies \mu = \nu$$