TRANSIZIONE DI FASE PER IL MODELLO DI ISING, $d \geq 2$

• Ising su $\mathbb{Z}^d$ a primi vicini

$\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda$

$$H_\Lambda(\sigma|\eta) = -J \sum_{\{x,y\}\in\Lambda} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x\in\Lambda} \sigma_x$$

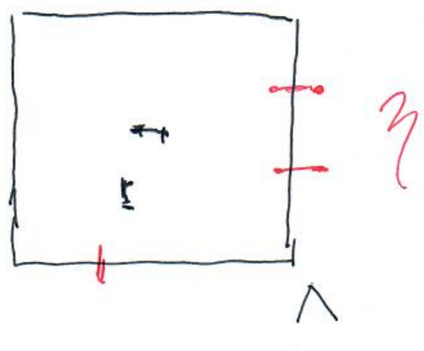
(coppie di primi vicini)

$$- \sum_{\substack{x\in\Lambda \\ y\in\Lambda^c \\ |x-y|=1}} \sigma_x \eta_y$$

(interazione con il bordo)

$J \geq 0$ (ferromagnetico)

$h \in \mathbb{R}$ campo esterno



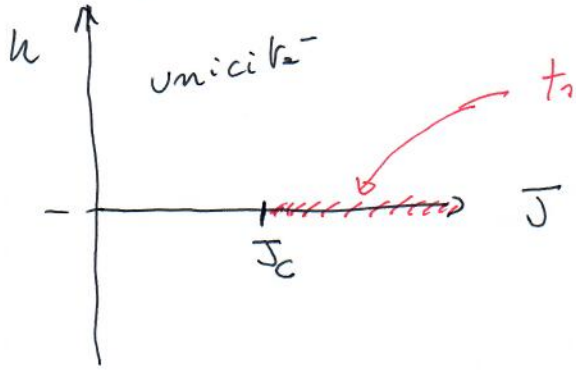
Misura di Gibbs di volume finito su $\Omega_\Lambda = \{-1,1\}^\Lambda$

$$\mu_\Lambda^\eta(\sigma) = \frac{1}{Z_\Lambda^\eta} e^{-H_\Lambda(\sigma|\eta)}$$

β riassorbito in J e h

Vogliamo stabilire il diagramma di fase

Sarà così



transizione di fase: $\exists$ stati di Gibbs di volume infinito con $\mu(\sigma_0) > 0$

[magnetizzazione spontanea]

$$\mu(\sigma_0) \doteq \mu(\sigma_0 = +) - \mu(\sigma_0 = -)$$

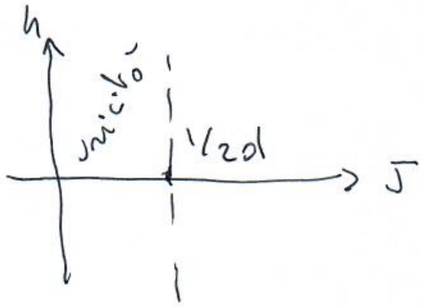
$J_c = J_c(d)$ non banale

$J_c(1) = +\infty$ (non c'è transizione di fase in $d=1$)

$J_c(2)$ nota esplicitamente

$(J_c, 0)$ è il punto più interessante di tutti. Poco o nulla in questo corso

per il criterio di Dobrushin finora sappiamo



$2dJ < 1 \Rightarrow$ unicità

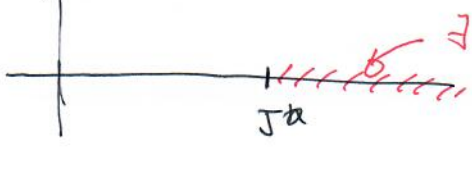
ovvero $J_c(d) \geq \frac{1}{2d}$

TEO 1 ($\exists$ transizioni di fase)

$d = 2$, $h = 0$. $\exists$ $J^* \in (0, +\infty)$

t.c. $J \geq J^* \Rightarrow |\underbrace{\mathcal{G}(0,J)}_{\text{stati di Gibbs di volume infinito}}| > 1$

ovvero

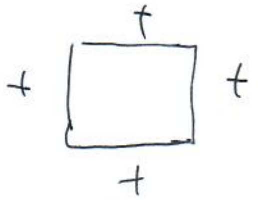


$\exists$ transizione di fase

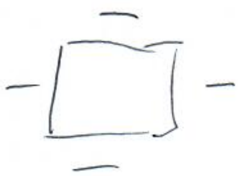
• Per trovare uno stato di volume infinito con magnetizzazione spontanea ($\mu(\sigma_0) > 0$) dobbiamo rompere la simmetria $\sigma \to -\sigma$

Per Curie-Weiss mettevamo $h > 0$ e poi (dopo il limite ~~in~~ $n \to \infty$) facevamo $h \downarrow 0$.

Qui una procedura più elegante: usiamo le condizioni al bordo



μ_Λ^+



μ_Λ^-

Faremo vedere che se $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda^+ \neq \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda^- \quad \text{perché } J \geq J^*$$

<u>Teo 2</u> (Effetto delle condizioni al bordo sopravvive il limite di volume infinito se J è grande)

$d = 2$, $h = 0$. $\exists\, J^* \in (0, \infty)$ $\delta > 0$ t.c.

$$J \geq J^* \Rightarrow \forall \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d \quad \mu_\Lambda^+(\sigma_0) \geq \delta$$

<u>OSS</u>: È cruciale l'uniformità in Λ:

$\exists\, \delta(J^*, \cancel{\Lambda})$ t.c. $\forall \Lambda$ ---

<u>dim</u> teo 1 (assumendo teo 2)

dalla teoria generale

$$\lim_{\Lambda} \mu_\Lambda^\eta \in \mathcal{G}(\Phi) = \text{stati di Gibbs di volume infinito}$$

Sia μ^+ punto di accumulazione di μ_Λ^+ (∃ per compattezza)
(poi vediamo che il limite ∃ per monotonia)

$\mu^+ \in \mathcal{G}(\Phi)$

è funzione locale

e $\quad \mu^+(\sigma_0) = \lim_{\Lambda} \mu_\Lambda^+(\sigma_0) \geq \delta > 0$

Ora uso la simmetria $\sigma \to -\sigma$

μ_Λ^- = stato di Gibbs in Λ con bordo $-$

per simmetria, da teo 2,

$$\mu_\Lambda^-(\sigma_0) \leq -\delta \quad \text{unif in } \Lambda$$

quindi

$$\dots \quad \mu^-(\sigma_0) \leq -\delta < 0$$

Pertanto $\mu^+ \neq \mu^- \Rightarrow |\mathcal{G}(J,0)| \geq 2$ $\square$

<u>OSS</u> per convessità

$$\mathcal{G}(J,0) \supset \{\alpha \mu^+ + (1-\alpha)\mu^-\}$$

~~l'affermazione~~

estremali

sarà $\quad \mathcal{G}(J,0)_e = \{\mu^+, \mu^-\}$

o ve ne sono altri ?!

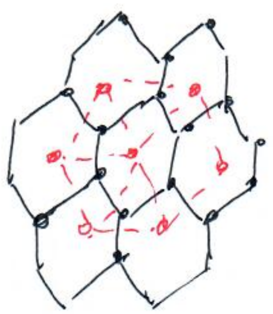
<u>teo 2</u>, "argomento di Peierls"

è speciale di $\mathbb{Z}^2$. Usa "l'autodualità" di $\mathbb{Z}^2$

$\mathbb{Z}^2$

$$(\mathbb{Z}^2)_{DUALE} = \mathbb{Z}^2 + \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

altro esempio

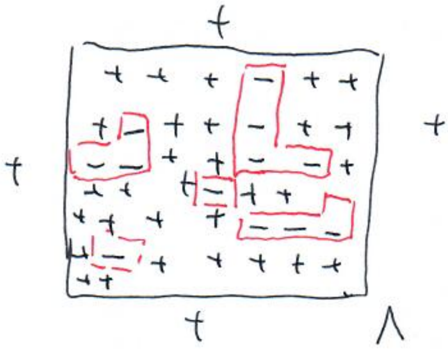


⬡ reticolo esagonale

△ reticolo triangolare

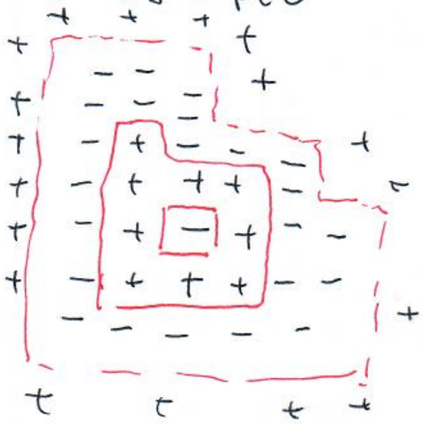
<u>dim teo 2</u>

Usando l'autodualità di $\mathbb{Z}^2$ descrivo una configurazione $\sigma \in \Omega_\Lambda$ in termini di "contorni" ~~del~~ (cammini chiusi del reticolo duale)



$\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda$

$\Gamma = \{\gamma\}$ con $\gamma \subset \mathbb{Z}^2_{duale}$ chiuso altro esempio



~~calcolo~~

oceano di +

~~isola~~

continente di −

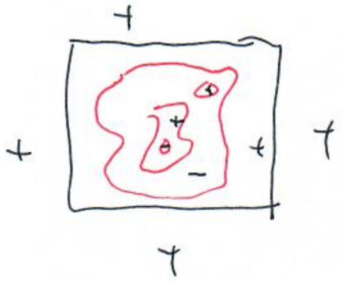
mare di +

isola di −

lago di +

...

è una biezione (note le condizioni al bordo)



Dato $\eta = +$ e $\Gamma = \{\gamma\}$ ricostruite σ

• scriviamo $H_\Lambda(\sigma|+)$ in termini di $\Gamma = \{\gamma\}$

conviene cambiare H_Λ di una costante (stessa misura di Gibbs)

$$\tilde{H}_\Lambda(\sigma|+) = H_\Lambda(\sigma|+) - \underbrace{H_\Lambda(+|+)}_{\text{minimo di } H_\Lambda(\cdot|+) \text{ tutte } \sigma_x = +}$$

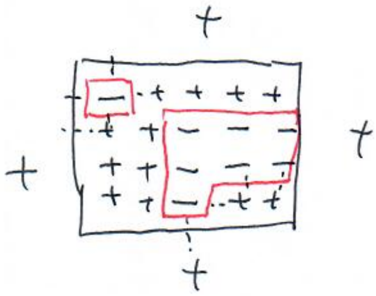
$$= -J \sum_{\substack{\{x,y\} \\ \subset \Lambda}} \sigma_x \sigma_y - J \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ y \notin \Lambda \\ |x-y|=1}} \sigma_x - \Big[-J \sum_{\{x,y\}} 1 - J \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ y \notin \Lambda}} 1 \Big]$$

$$= -J \sum_{\{x,y\} \subset \Lambda} \underbrace{(\sigma_x \sigma_y - 1)}_{\begin{cases} 0 & \text{se } \sigma_x\sigma_y = 1 \\ -2 & \text{se } \sigma_x\sigma_y = -1 \end{cases}} - J \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ y \notin \Lambda \\ |x-y|=1}} (\sigma_x - 1)$$

$= 2J \;\#$ coppie di primi vicini con σ discorde sui due siti

intendo $\sigma = +$ su Λ^c

è facile scrivere $\tilde{H}_\Lambda$ in termini dei contorni



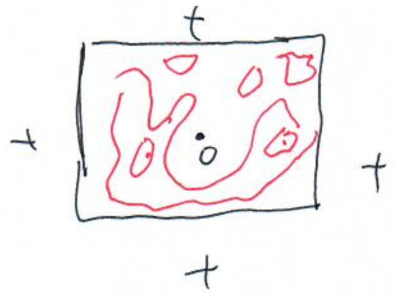
$$\tilde{H}_\Lambda(\sigma|+) = 2J \sum_{\gamma\in\Gamma} \underbrace{|\gamma|}_{\text{lunghezza del contorno } \gamma}$$

Ora una semplice inclusione di eventi

$$\{\sigma\in\Omega_\Lambda : \sigma_0 = -\} \subset \{\Gamma : \exists \text{ contorno } \gamma\in\Gamma \text{ che circonda } 0\}$$

infatti poiché bordo $= +$

se $\nexists\, \gamma$ che circonda $0 \Rightarrow \sigma_0 = +$



quindi $\mu^+_\Lambda(\sigma_0 = -) \le \mu^+_\Lambda(\exists\gamma : \gamma \text{ circonda } 0)$

Per $\ell \ge 1$ sia $A_\ell = \{\gamma : \underbrace{\gamma \ni 0}_{\text{circonda } 0},\ |\gamma| = \ell\}$

$$\mu^+_\Lambda(\sigma_0 = -) \le \sum_{\ell=4}^{\infty} \mu^+_\Lambda(\exists\, \gamma\in A_\ell)$$

ora

$$\mu^+_\Lambda(\exists\, \gamma\in A_\ell) = \frac{\sum_{\Gamma:\exists\gamma\in A_\ell} e^{-\overbrace{\tilde{H}_\Lambda(\Gamma|+)}^{= 2J\sum_{\tilde\gamma\in\Gamma}|\tilde\gamma|}}}{\sum_{\Gamma} e^{-\tilde{H}_\Lambda(\Gamma|+)}}$$

$$= \frac{\sum_{\bar\gamma \in A_\ell} \sum_{\Gamma : \Gamma \ni \bar\gamma} e^{-2\beta J \sum_{\tilde\gamma \in \Gamma} |\tilde\gamma|}}{\sum_{\Gamma} e^{-2\beta \sum_{\tilde\gamma \in \Gamma} |\tilde\gamma|}}$$

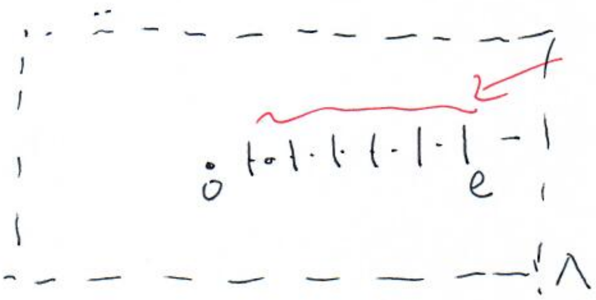
$$= e^{-2\beta \ell} \sum_{\bar\gamma \in A_\ell} \frac{\sum_{\Gamma : \Gamma \ni \bar\gamma} e^{-2\beta J \sum_{\tilde\gamma \in \Gamma \setminus \{\bar\gamma\}} |\tilde\gamma|}}{\sum_{\Gamma} e^{-2\beta J \sum_{\tilde\gamma \in \Gamma} |\tilde\gamma|}}$$

≤ 1 ogni termine a numeratore c'è anche a denominatore

trovo

$$\mu^+_\Lambda(\sigma_0 = -) \leq \sum_{\ell=4}^{\infty} |A_\ell| \, e^{-2J\ell}$$

ora ci serve $|A_\ell| \leq \dots$



se $|\gamma| = \ell$ $\gamma \ni 0$ deve usare uno di questi ℓ archi del reticolo duale

contorni di lunghezza ℓ che usano un arco fissato $\leq 3^{\ell-1}$

dimentico che sono chiusi, autoevitanti, ...

trovo

$$\mu^+_\Lambda(\sigma_0 = -) \leq \sum_{\ell=4}^{\infty} \ell \, 3^{\ell-1} e^{-2J\ell}$$

se $3e^{-2J} < 1$ la serie converge.

Inoltre, poiché $\ell \geq 4$

$\exists\ \delta \in (0, \frac{1}{2})$ $\quad J_* \in (0, \infty)$ t.c. se $J \geq J_*$

$$\sum_{\ell=4}^{\infty} \ell \, 3^{\ell-1} e^{-2J\ell} \leq \delta < \frac{1}{2}$$

quindi

$$\mu_\Lambda^+(\sigma_0) = \mu_\Lambda^+(\sigma_0 = +) - \mu_\Lambda^+(\sigma_0 = -) \geq 1 - 2\delta > 0$$

uniformemente in Λ

<u>OSS 1</u> Effettivamente l'argomento mostra che

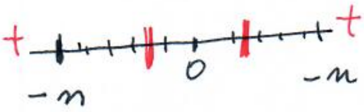
$$\lim_{J \to +\infty} \mu_\Lambda^+(\sigma_0) = +1 \quad \text{unif in } \Lambda$$

<u>OSS 2</u> È proprio legato alla "geometria" di $\mathbb{Z}^2$

se $d = 1$

costo energetico di un contorno $\ni 0$

$= 4J$



$\#$ contorni $\propto n^2$