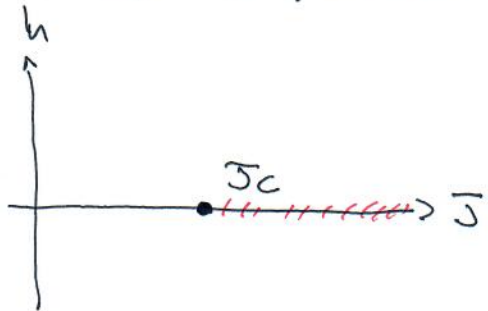


FENOMENI CRITICI

Ising $d \geq 2$, diagramma di fase



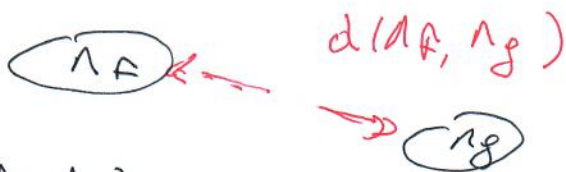
$(J_c, 0)$ è il punto più interessante di tutti. Come si comporta il sistema lì vicino?

Slogan 1: "al punto critico la lunghezza di correlazione diverge"

Il stato di Gibbs di volume infinito (stati puri μ^\pm invarianti per traslazioni nella zona di coesistenza)

$F, \theta, g \rightsquigarrow: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ locali in Λ_F, Λ_g

Covarianza



$$\mu(F; g) \approx e^{-\frac{d(\Lambda_F, \Lambda_g)}{\xi}}$$

ξ lunghezza di correlazione:

se osservate il sistema su scale $\gg \xi$

(media sulle traslazioni dell'osservabile in una scatola di lato ξ di un osservabile locale)

Vedere "essentialmix" variabili aleatorie indipendenti

Fatto: Pulsing $\{ \leftarrow + \infty \}$ salvo al punto critico
 (è impetibile che siano stati puri nella
 zona di coesistenza)

(2)

Al punto critico le correlazioni decadono
 a potenza.

Dalla soluzione di Onsager $d=2$, al punto critico

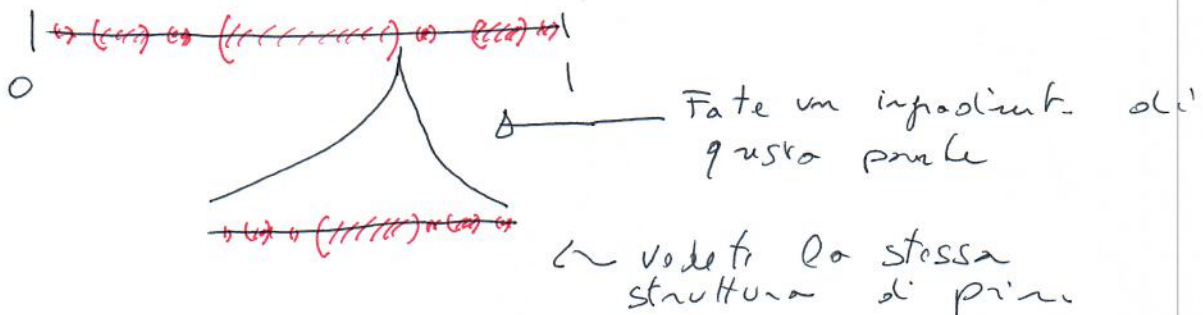
$$\rho(x, y) \approx \frac{1}{|x-y|^{1/4}}$$

(asintotica per $|x-y| \rightarrow \infty$)

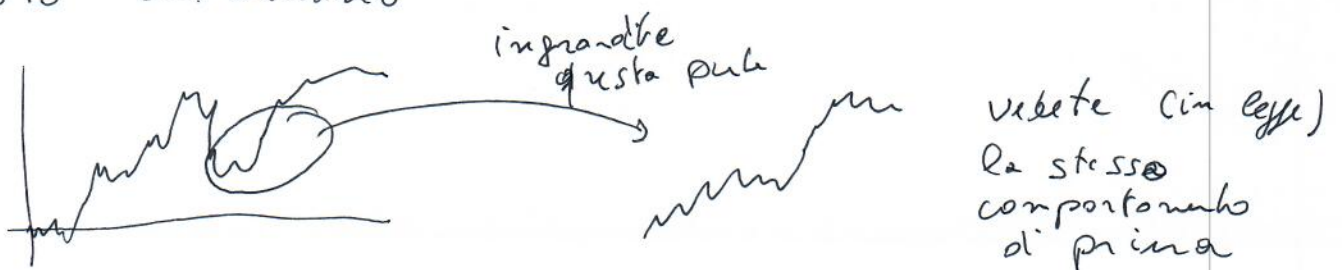
$d \geq 3$ non c'è una formula analitica
 (che)

Slogan 2: "Al punto critico il sistema
 è invariante di scala" [autosimile]"

Esempio: Insieme di Cantor



Plotto Browniano



I modelli di meccanica statistica su \mathbb{Z}^d non possono essere esattamente auto simili poiché c'è la scala del reticolo, al punto critico lo sono (circa) per scale \Rightarrow passo reticolo

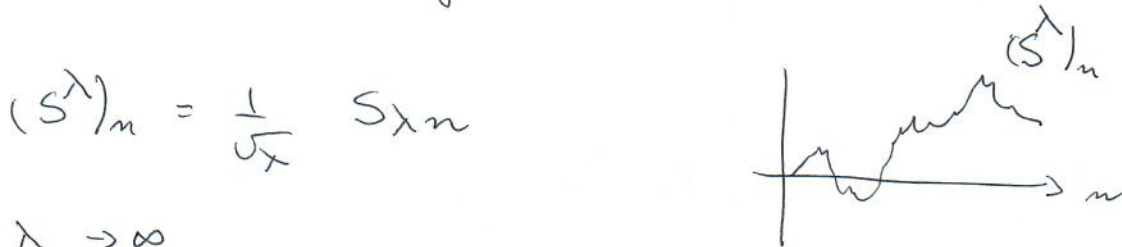
P. suggestiva aleatoria simmetrica semplice

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad X_i \text{ iid} \quad X_i = \begin{cases} +1 & \text{prob } 1/2 \\ -1 & \text{" } 1/2 \end{cases}$$



limite di scala (principio di invarianza)

guardate questa figura da lontano



$$\lambda \rightarrow \infty$$

$S^\lambda \rightarrow$ Moto Browniano

} è esattamente invariante di scala

$$B_t, t \geq 0 \stackrel{\text{Legge}}{=} \frac{1}{\sqrt{t}} B_{\lambda t}, t \geq 0$$

• effetto legato = *

$d=2$, dalla soluzione di Onsager

$$C(x) = \mu(\beta_0, \beta_x) \quad \text{covarianza}$$

$C(x)$ ha le simmetrie di \mathbb{Z}^2
(rotazioni di $\pi/4$)

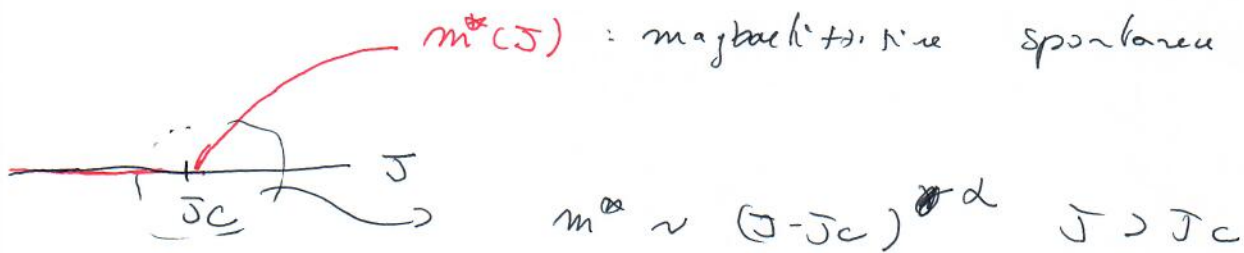
Non c'è modo (che possa essere invertito) per rotazioni di un angolo arbitrario.

Al punto critico lo diventa!

$$oc = |x| \hat{x}, \quad \hat{x} \in S \quad (d=2)$$

$$C(x) \sim \frac{1}{|x|^{1/4}} A(\hat{x}) \quad \text{è invariante per rotazioni.} \\ \text{(se } |x| \gg 1 \text{)}$$

• Indici critici. Descrivono il comportamento a potenza vicino al punto critico.



ve ne sono altri $m(h, J_c) \sim |h|^\beta \quad h \downarrow 0$
" magnetizzazione

$$\mu(\beta_1, \beta_2) \sim \frac{1}{|x|^\gamma} \text{ al punto critico}$$

Assumendo invarianza di scala si trovano

relazioni tra i diversi indici critici

per i fisici : fatto ovvio

per i matematici : un problema aperto
(risultati parziali)

Slogan 3 "I fenomeni critici sono universali"

LS

Vicino al punto critico il comportamento del sistema dipende da pochi dettagli (classi di universalità)

Stessa situazione che nei teoremi limite della probabilità

$$X_i \text{ iid} \quad \mathbb{E}(X_i) = 0 \quad \mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m X_i \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

La legge limite dipende solo da σ^2 non dalla distribuzione di X_i

Nell'ambito della transizione ferromagnetica

considerate Ising non a piano vicini $\beta J_{x,y}$
($J_{x,y}$ scalari)

Il valore critico ~~il~~ β_c dipende da tutte le costanti di accoppiamento $J_{x,y}$

Il comportamento del sistema a β_c , in particolare gli indici critici, dipendono solo dalla dimensione d

In $d=2$ tutti i modelli tipo Ising (interazione ferromagnetica a corto raggio) hanno gli stessi indici critici di quelli ottenuti via soluzione esatta di Onsager.

(Dimostrazioni pauca)

• Gruppo di rinormalizzazione

Introdotta per la descrizione dei fenomeni critici.
Permette calcolo approssimato indici critici
in $d = 3$ -

Ideologia gruppo di rinormalizzazione ha avuto
diverse applicazioni in diversi contesti
(anche dimostrazioni riprese in matematica)

~~Gruppo~~ Semigrupp

[E è effettivamente un gruppo nel contesto
delle teorie di campo in cui è stato
inizialmente introdotto]

• Contesto teorema limite centrale

X_i iid $E(X_i) = 0 \quad \forall(X_i) = 1$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}$

ogni volta raddoppio $n = 2^l$

$Z_1 = X_1 \quad Z_2 = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$

$Z_3 = \frac{X_1 + \dots + X_4}{\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Z_2 + \tilde{Z}_2)$

← copia iid di Z_2

$Z_{e+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Z_e + \tilde{Z}_e)$

$$\mathcal{X} = \{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \int x d\mu = 0, \int x^2 d\mu = 1 \} \quad (7)$$

introduco la mappa

$$T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

$$T(\mu) \stackrel{\text{diffe}}{=} \frac{X + \tilde{X}}{\sqrt{2}} \quad \text{con } X, \tilde{X} \text{ iid con legge } \mu$$

$$T_e = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{e \text{ volte}} = T^e$$

proprietà di semigrupp: $T_{e+e'} = T_e \circ T_{e'}$

Evidente che

$$\text{diffe}(Z_{e+1}) = T_e(\text{diffe}(X_1))$$

Devo ora capire cosa succede a T_e per $e \rightarrow \infty$

• Punti fissi

$$\text{se } \mu \sim \mathcal{N}(0,1) \quad T(\mu) = \mu$$

$$\text{ovvero } X, \tilde{X} \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ indep.} \quad \frac{X + \tilde{X}}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Questo spiega perché il teorema di CLT centrale è vero.

Dobbiamo ora dimostrare che $\mathcal{X} \cong \mathbb{R}$

$$\text{se } \mu \in \mathcal{X} \quad T_e(\mu) \xrightarrow{e \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0,1)$$

Vediamo cosa succede vicino a ~~sp~~ $\mathcal{N}(0,1)$

[studiamo il linearizzato di T in $\mathcal{N}(0,1)$]

$$\mu(dx) = f(x) dx$$

$$T(\mu) = g(x) dx$$

$g =$ densità di $\frac{X+X^2}{\sqrt{2}}$

con X, \tilde{X} iid
con densità f

o per ~~$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$~~

quindi

$$g(x) = \sqrt{2} \int dy f(y) f(\sqrt{2}x - y)$$

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (1 + \varepsilon h(x))$$

\nwarrow densità gaussiana

$$T(f_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (1 + \varepsilon(Lh)(x) + o(\varepsilon))$$

Un calcolo diretto (esercizio)

$$(Lh)(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{-y^2} h\left(y + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Ci serve ora lo spettro di L .

Vogliamo autovalori $(\lambda) < 1$

affinché il punto fisso gaussiano di T sia attrattivo.

EFFICIENTE

$$h(x) = 1 \quad (Lh)(x) = 2 \quad \lambda_0 = 2$$

$$h(x) = x \quad (Lh)(x) = \sqrt{2} x = \sqrt{2} h(x) \quad \lambda_1 = \sqrt{2}$$

$$h(x) = x^2 - 1 \quad (Lh)(x) = \dots = x^2 - 1 = h(x) \quad (\lambda_2 = 1)$$

$$h(x) = x^3 - 3x \quad (Lh)(x) = \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} h(x) \quad (\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$h(x) =$ polinomio di Hermite grado n

$$(Lh)(x) = \dots = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} h(x) \quad \lambda_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}$$

ma $\&$ F.T.C. ~~semplice~~

$$\int dx P(x) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\int dx \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} h(x) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

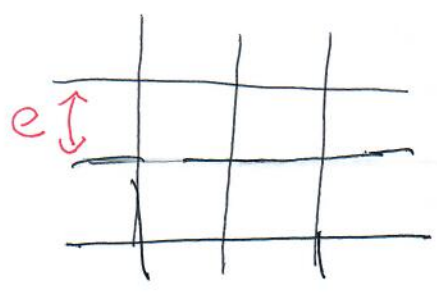
dici che le proiezioni ortogonali di h nei primi autovettori di L (quelli con autoval ≥ 1) sono zero.

Il punto fisso gaussiano è attinuo rispetto alla mappa gruppo di normalizzazione.

Con le ipotesi giuste (invero assai restrittive) questo argomento è una dimostrazione del teorema limite centrale.

- Gruppo di rinormalizzazione per modelli di meccanica statistica.

Ci sono vari modi di realizzare la mappa del gruppo di rinormalizzazione
 "variabili di blocco"



$$\mathbb{Z}^d = \bigcup_{x \in (e\mathbb{Z})^d} \Lambda_e(x)$$

↳ cubo di lato e con centro x

σ_x^e $x \in (e\mathbb{Z})^d$ Variabili di blocco

$$\sigma_x^e = \frac{\sum_{\gamma \in \Lambda_e(x)} \sigma_\gamma}{\sqrt{\mu \left(\sum_{\gamma \in \Lambda_e(x)} \sigma_\gamma, \sum_{\gamma \in \Lambda_e(x)} \sigma_\gamma \right)}}$$

↳ varianza

$$\mu^e := \text{distribuzione} \left(\sigma_x^e, x \in (e\mathbb{Z})^d \right)$$

proprietà di semigruppamento: $(\mu^e)^{e'} = \mu^{e \cdot e'}$

Si tratta ora di trovare punti fissi della mappa di gruppo di rinormalizzazione.

Wilson (premio Nobel)

$d \geq 4$. Si costruisce un punto fisso "di campo medio" e si calcolano gli indici critici

$d = 4 - \epsilon$ si costruisce "perturbativa" in ϵ un punto fisso non di campo medio

$\epsilon = 1$ permette di trovare approssimati indici critici in ~~la~~ $d = 3$

$d = 2$. Invarianza conforme

$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ conforme se preserva gli angoli

per $n = 2$ ϕ conforme sse, via via identificazione $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$, ϕ

ϕ è analitica

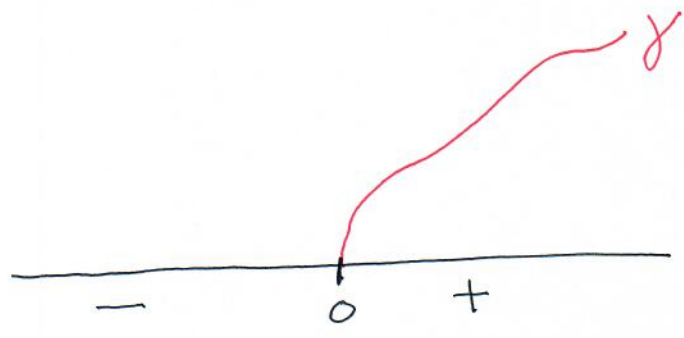
in $d = 2$ modelli critici sono invarianti conformi

Fantostici sviluppi della statistica del XXI secolo.

[Kosterlitz Fields a ~~Udo Schiam~~, Smirnov]
Werner

Un risultato "tipico". Completamente rigoroso

1sing $d=2$ V_{SUE} semipiano con condition:
tipo De Gennes



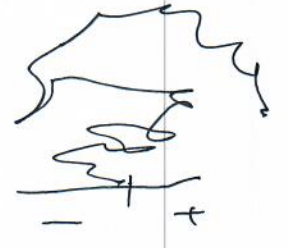
γ continuo (∞)
che spiega le
Fasi imposte
al bordo

Passo reticolo = ϵ

Vogliamo capire cosa succede per $\epsilon \rightarrow 0$

$J < J_c$ (alta temperatura)

circa $\epsilon \rightarrow 0$ a caso: le variabili
di contorno non sono quelle adatte



$\gamma = \gamma_\epsilon$ non ha spunti di
nessun campo
come curva continua
immerso in \mathbb{R}^2_+

$J > J_c$

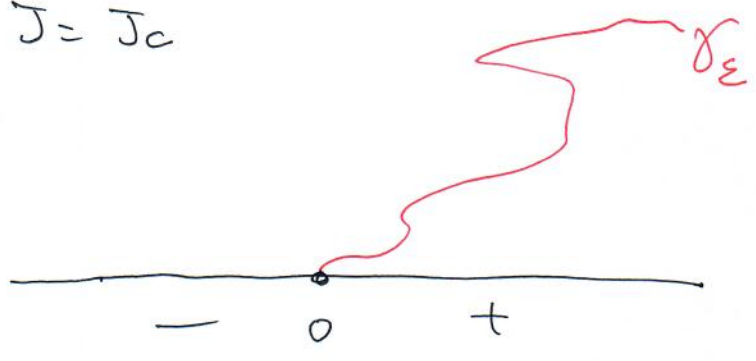
con prob $\frac{1}{2}$ vira -
" $\frac{1}{2}$ vira +

per $\gamma_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0}$ costruzioni connesse di
2 diffeom.



il limite non è tanto interessante.

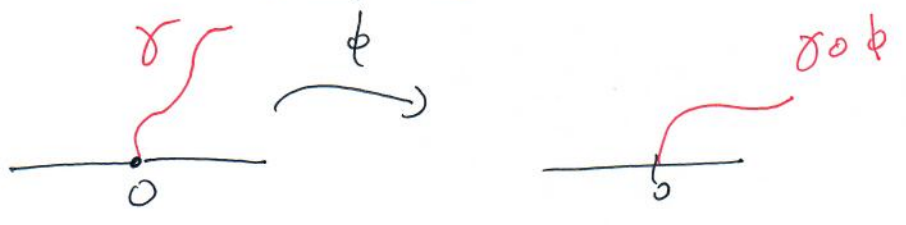
$J = J_0$



γ_ε è compatta (come curva continua su \mathbb{R}^2_t)
nel limite $\varepsilon \downarrow 0$

La legge limite è non semplice
(γ rimane aleatoria)

Minacolo 1 [Sminacolo] La legge di γ è invariante
conforme



ϕ olomorfo, $\phi(0) = 0, \dots$

$\gamma \circ \phi \stackrel{\text{legge}}{=} \gamma$

Miracolo 2 [Schramm]

leggi su curve
invarianti conformi + condizioni
tecniche

sono solo una famiglia ad un
parametro. con descrizione
esplicita [SLE]

per Ising si identifica il valore
del parametro [Smirnov]

- Si poteva ~~per~~ percorrere la stessa strada
per la collezione di Bernoulli

veniva SLE con un altro parametro
[Smirnov]

Influenza della meccanica statistica
in altri ambiti:

- Sistemi dinamici [Dinamica simbolica]

Ruelle "Thermodynamic Formalism"

- Processi di Markov

(organizzati in modo da essere
reversibili rispetto ad una misura
di Gibbs)

Lifshitz "Interacting particles systems"

- Teoria dell'informazione

Schields "The ergodic theory of
discrete sample paths"

- sistemi biologici

Sfida di per la vostra generazione