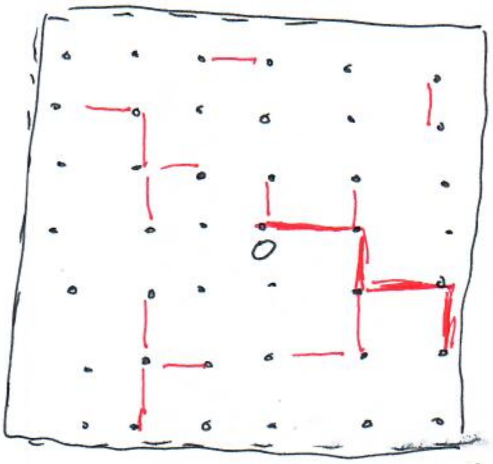
PERCOLAZIONE

$\mathbb{Z}^2$ 0 è bagnata

Ogni arco è aperto o chiuso con probabilità p e $1-p$, l'uno indipendentemente dall'altro



Λ

L'acqua arriva a bagnare $\partial\Lambda$?

cosa succede se $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2$

$$\mathbb{B} = \{ \{x,y\},\ |x-y|=1,\ x,y \in \mathbb{Z}^2 \}$$

archi di $\mathbb{Z}^2$

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{B}}$$

$\mathbb{P}_p$ = probabilità prodotto su Ω

con $\mathbb{P}_p(\underbrace{\omega_e = 0}_{\text{arco chiuso}}) = 1-p$

$e \in \mathbb{B}$

$\mathbb{P}_p(\underbrace{\omega_e = 1}_{\text{arco aperto}}) = p$

$$\theta_\Lambda(p) = \mathbb{P}_p(\underbrace{\{0 \longleftrightarrow \partial\Lambda\}}_{\{\exists \text{ cammino di archi aperti da } 0 \text{ a } \partial\Lambda\}})$$

Lemma

$\Lambda \subset \Lambda' \implies \theta_{\Lambda'}(p) \le \theta_\Lambda(p)$ $\quad \theta \searrow$ in Λ

$p \le p' \implies \theta_\Lambda(p) \le \theta(p')$ $\quad \theta \nearrow$ in p

dim

$\underline{p} = \{ p_e, e \in \mathbb{B} \}$

ordine parziale solito (per componenti)
in $[0,1]^{\mathbb{B}}$ e Ω

$\underline{p} \le \underline{p}' \Rightarrow \mathbb{P}_{\underline{p}} \le \mathbb{P}_{\underline{p}'}$ monotonia FKG

infatti:
- verifico criterio di Holley
- costruisco l'accoppiamento sopra la diagonale: poiché è prodotto basta fare il caso di un singolo arco

$\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda\}$ è un evento crescente

Implica entrambe le monotonie ($\underline{p} \uparrow 1$ su $\Lambda' \setminus \Lambda$ per la prima) ∎

$$\theta(p) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \theta_\Lambda(p)$$

- Ora c'è una transizione di fase analoga a quella ferromagnetica

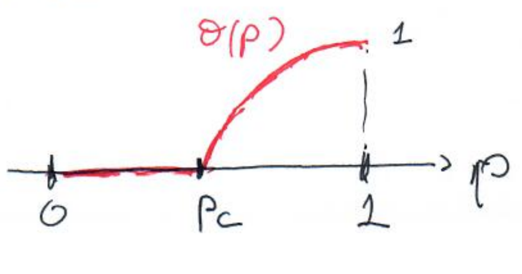
$$p_c = \inf \{ p : \theta(p) > 0 \}$$
$$= \sup \{ p : \theta(p) = 0 \}$$

$p_c = p_c(d)$

$d = 1$ $\quad p_c = 1$ (esercizio)

$d \ge 2$ $\quad 0 < p_c < 1$

e quindi:



OSS: Ancora per monotonia FKG $p_c \searrow$ in d

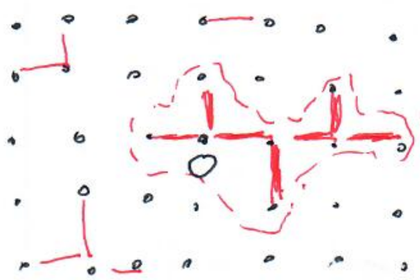
teo $d \geq 2$

$$p_c(d) \in (0,1)$$ [$\exists$ transizione di fase]

dim

(1) $\exists$ $p_0 > 0$ t.c. $\theta(p) = 0$ $\quad p \in (0, p_0)$

Funzione di percolazione, $d = 2$ per semplicità



$C(\omega) = \{$ componente connessa massimale archi aperti che contiene 0 $\}$

Λ_n = quadrato di lato $2n+1$

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(\{0 \leftrightarrow \infty\}) \overset{\exists \text{ per monotonia FKG}}{=} \lim_n \mathbb{P}_p(\{0 \to \partial\Lambda_n\})$$

$$\overset{\text{monotonia FKG}}{\leq} \mathbb{P}_p(\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}) \underset{\text{inclusione di eventi}}{\leq} \mathbb{P}_p(\{\omega : |C(\omega)| \geq n\})$$

$$\mathbb{P}_p(|C(\omega)| \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C(\omega)| = k)$$

$$\mathbb{P}_p(|C(\omega)| = k) \leq \underbrace{p^k}_{\text{ogni arco deve essere aperto}} \cdot \#\text{ insiemi connessi} \ni 0 \text{ di cardinalità } k$$

$$\leq p^k \, 4 \, 3^{k-1}$$

elimino il vincolo che il cammino è autoevitante ho ricavato

$$\theta(p) \le \sum_{k=n}^{\infty} p^k \, 4 \, 3^{k-1}$$

passo al limite per $n \to \infty$

$$p < \frac{1}{3} \Rightarrow \theta(p) = 0$$

OSS ~~[illegible]~~

su $\mathbb{Z}^d$ la condizione è $p < 2d-1$

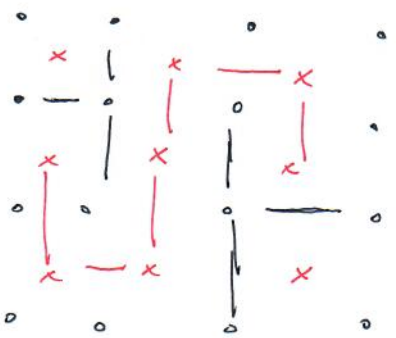
[stima di campo medio] asintoticamente ~~corretta~~ ottimale per $d \to \infty$

(2) $\exists\, p_1 < 1$ t.c. $\theta(p) > 0$ se $p \in (p_1, 1]$

dimostrazione speciale $d=2$ (autodualità di $\mathbb{Z}^2$)

ma, per monotonia FKG, percolo $d=2 \Rightarrow$ percolo $d=3$ ...

Autodualità di $\mathbb{Z}^2$



$\mathbb{Z}^2$

$\mathbb{Z}^{2*} = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

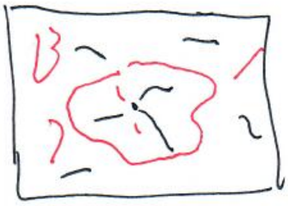
archi aperti $\mathbb{Z}^2$ $\longleftrightarrow$ archi chiusi su $\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$q = 1 - p$$

$$\mathbb{P}_p \text{ su } \mathbb{Z}^2 \longleftrightarrow \mathbb{P}_q \text{ su } \mathbb{Z}^2 + (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

devo dim $p > p_1$ $\quad \mathbb{P}_p(\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}) > 0$ unif in n

~~equivalente~~ equivalentemente $\quad \mathbb{P}_p(\{0 \not\leftrightarrow \partial\Lambda_n\}) < 1$ unif in n



Λ_n

$0 \not\leftrightarrow \partial\Lambda_n \iff \exists$ ciclo di archi aperto su $\mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ che circonda 0

$$\mathbb{P}_p(\{0 \not\leftrightarrow \partial\Lambda_n\}) = \mathbb{P}_q\left(\left\{\exists \text{ ciclo aperto contenente } 0\right\}\right)$$

σ-subadditività

$0 \quad 1 \quad 2$

deve usare almeno uno di questi archi ~~del~~ ~~set~~ di $\mathbb{Z}^2+(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_q\left(\exists \text{ ciclo aperto} \ni 0 \text{ che } \cancel{\text{passa}} \text{ usa per } i \,|\, i+1\right)$$

deve avere lunghezza $\ge 2i+2$

$$\le \mathbb{P}_q\left(\exists \text{ cammino aperto lungo} \ge 2i+2 \text{ che uso } i \,|\, i+1\right)$$

$$\le \sum_{j=2i+2}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}_q\left(\cancel{\text{ciclo}} \text{ cammino aperto lungo } j \text{ che } \cancel{\text{parte da}} \text{ usa } \cdot|\cdot\right)}_{\le\, q^j\, 3^{j-1}}$$

Fate le somme

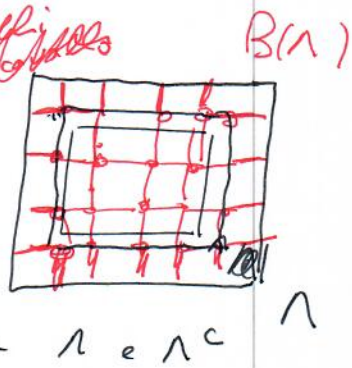
... come Peierls per Ising ..

se q piccolo abbastanza $\mathbb{P}_q(\exists \text{ ciclo aperto} \ni 0) < 1$

◎ MODELLO FK [Fortuin - Kasteleyn]

(anche "Random cluster")

È ancora percolation, ma ω_e $e \in \mathbb{B}$ non sono più indipendenti



$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ $\quad \mathbb{B}(\Lambda) = \{\text{archi su } \Lambda\}$

ci sono condizioni al bordo

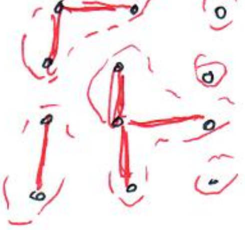
f = free gli archi e a cavallo tra Λ e Λ^c sono tutti chiuso

$$\Omega_\Lambda = \{0,1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$$

$$\Phi^f_{\Lambda,p,q}(\omega) = \frac{1}{Z^f_{\Lambda,p,q}} \underbrace{\prod_{e \in B(\Lambda)} p^{\omega_e} (1-p)^{1-\omega_e}}_{\text{Bernoulli iid}} \; q^{cl(\omega)}$$

$cl(\omega) :=$ # componenti connesse di Λ (rispetto archi aperti)

~~$q=1$ Percolation di Bernoulli $\Rightarrow \Phi^f_{\Lambda,p,1} = \mathbb{P}_{\Lambda,p}$~~



$cl(\omega) = 6$

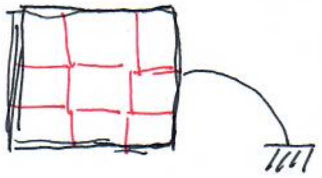
$q > 1$ "più componenti connesse"

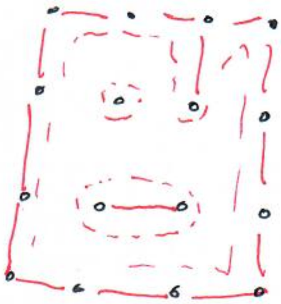
$\Rightarrow$ più difficile percolare

Altra condizione al bordo

$\Phi^{w}_{\Lambda,p,q}$ $\qquad w$ = wired "a terra"

cambia il modo di contare le componenti connesse





$cl_w(\omega) = 3$

$$cl_w(\omega) \leq cl_f(\omega)$$

[illegible] Via ~~[illegible]~~ ordine FKG posso [se $q > 1$] controllare probabilità di percolazione con Bernoulli

<u>Lemma</u> $q \geq 1$

$$\Phi^{f}_{\Lambda,p,q} \leq \Phi^{f}_{\Lambda,p',q} \qquad p' \geq p$$

$$\mathbb{P}_{p/(p+q(1-p))} \leq \Phi^{w}_{p,q} \leq \Phi^{f}_{p,q} \leq \mathbb{P}_p$$

dimostrazione omessa

(usa criterio di Holley)

⓪ RAPPRESENTAZIONE FK DI ISING

$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

$\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda$ $\qquad \mu^f_{\Lambda,J}(\sigma)$ Ising con $h=0$ e bordo vuoto

$\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)}$ $\qquad \Phi^f_{\Lambda,p,q}(\omega)$ Modello FK con bordo vuoto
$q=2$
$p=p(J)$ da aggiustare

Costruisco un accoppiamento

$\mathbb{P}_\Lambda(\omega,\sigma)$ probabilità su $\{0,1\}^{\mathbb{B}(\Lambda)} \times \{-1,1\}^\Lambda$

definito da

(Forza $\sigma_x=\sigma_y$ se $\omega_e=1$)

$$\mathbb{P}_\Lambda(\omega,\sigma) = \frac{1}{Z_\Lambda} \prod_{e=\{x,y\}\in\mathbb{B}(\Lambda)} p^{\omega_e}(1-p)^{1-\omega_e}\, \mathbb{1}_{(\sigma_x-\sigma_y)\omega_e=0}$$

A parole

- archi aperti ($\omega_e=1$) o chiusi ($\omega_e=0$) indipendenti con probabilità p e $1-p$
- σ uniforme in $\{-1,1\}^\Lambda$
- Condiziono a che σ sia costante sulle componenti connesse (ai sensi di ω_e aperti) di Λ.

Prop

$\mathbb{P}$ è un accoppiamento

dim

① $\forall \omega$ $$\sum_\sigma \mathbb{P}(\omega,\sigma) = \Phi^F_{p,2}(\omega)$$

$$\sum_\sigma \mathbb{P}(\omega,\sigma) = \sum_{\substack{\sigma: \\ \sigma \text{ è} \\ \omega \text{ compatibile}}} \frac{1}{Z} \prod_e p^{\omega_e}(1-p)^{1-\omega_e}$$

$\rightsquigarrow$ σ costante sulle componenti connesse indotte da ω

$$\#\ \sigma\ \omega\text{-compatibili} = 2^{cl(\omega)}$$

$$= \frac{1}{Z} \prod_e p^{\omega_e}(1-p)^{1-\omega_e} \; 2^{cl(\omega)} = \Phi^F_{\Lambda,p,2}(\omega)$$

② $$\sum_\omega \mathbb{P}(\omega,\sigma) = \mu^f_{\Lambda,J}(\sigma) \qquad \forall \sigma$$

$$\sum_\omega \mathbb{P}(\omega,\sigma) = \sum_{\substack{\omega: \\ \omega \text{ è } \sigma\text{-compatibile}}} \frac{1}{Z} \prod_e p^{\omega_e}(1-p)^{1-\omega_e}$$

$\rightsquigarrow$ $\omega_{\{x,y\}} = 0$ quando $\sigma_x \neq \sigma_y$

Fisso $e = \{x,y\}$

se $\sigma_x = \sigma_y$ non ci sono vincoli

e $\sum_{\omega_e} \cdots = 1$

se $\sigma_x \neq \sigma_y$ rimane solo $\omega_e = 0$ $\rightsquigarrow$ $(1-p)$

quindi

$$\sum_{\omega} \mathbb{P}(\omega, \sigma) = \frac{1}{Z} (1-p)^{N(\sigma)}$$

$N(\sigma) = \#$ archi $\{x, y\}$ in cui $\sigma_x \neq \sigma_y$

poiché

$$\sigma_x \sigma_y = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma_x = \sigma_y \\ -1 & \text{se } \sigma_x \neq \sigma_y \end{cases} = 1 - 2 \mathbb{1}_{\sigma_x \neq \sigma_y}$$

$$\sum_{\{x,y\}} \sigma_x \sigma_y = \underline{|\mathbb{B}(\Lambda)|} - 2 N(\sigma)$$

cambia solo la costante di normalizzazione

basta quindi scegliere p e J tali che

$$e^{J\left[\sum_{\{x,y\}} \sigma_x \sigma_y - |\mathbb{B}(\Lambda)|\right]} = e^{-J 2 N(\sigma)} = (1-p)^{N(\sigma)}$$

ovvero $\quad 1-p = e^{-2J}$

$\boxtimes$

OSS L'accoppiamento funziona anche tra $\mu^{+}_{\Lambda, J}$ e $\Phi^{w}_{\Lambda, p, 2}$

con $\mathbb{P}^{+}$ condizionata a che $\sigma = +$ sul cluster che tocca $\partial\Lambda$

A che serve?

Dimostrazione alternativa transizione di fase

<u>COR</u>

$$\mu^{+}_{\Lambda,J}(\sigma_0) = \Phi^{w}_{\Lambda,p,2}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda)$$

$$p = p(J)$$

<u>dim</u>: uso l'accoppiamento

$$\mu^{+}_{\Lambda,J}(\sigma_0 = +) = \sum_{\sigma} \sum_{\omega} \sigma_0 \; \mathbb{P}^{+}_{\Lambda}(\omega, \sigma)$$

Fisso ω e faccio $\sum_{\sigma}$

- se $0 \overset{\omega}{\not\leftrightarrow} \partial\Lambda$ $\quad \sigma_0 = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ con prob $\frac{1}{2}$

  $\rightsquigarrow$ viene 0

- se $0 \overset{\omega}{\leftrightarrow} \partial\Lambda$ $\quad \sigma_0 = 1$ certamente

  (condizioni al bordo wired)

la $\sum_{\omega}$ produce ora

$$\Phi^{w}_{\Lambda,p,2}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda) \qquad \square$$

Conseguenza COR + Dominazione di $\Phi_{p,q}$ con Bernoulli: è la transizione di fase di Ising