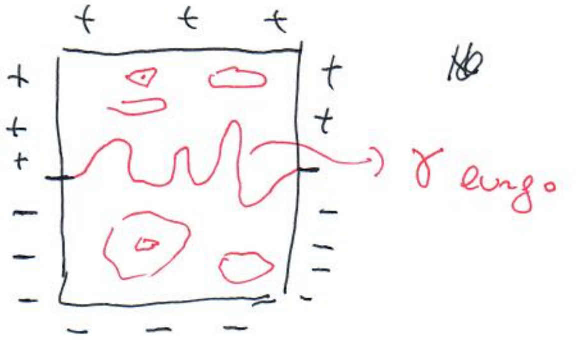
STATI DI GIBBS NON INVARIANTI PER TRASLAZIONI (=: STATI DI DOBRUSHIN)

- Sembra strano, ma ∃ stati di Gibbs di volume infinito (= soluzioni DLR) **non** invarianti per traslazioni ~~che~~ anche se il potenziale lo è.

- Si possono costruire per il modello di Ising ma solo per $d \geq 3$ ~~e~~, a temperatura abbastanza bassa (J grande) e campo magnetico nullo.
  Descrivono un'interfaccia (tra la fase + e la fase −) localizzata.

- Per costruirli ~~[illegible]~~ scegliamo delle condizioni al bordo che forzino la presenza di un'interfaccia e vediamo cosa succede nel limite termodinamico (condizioni al bordo di Dobrushin)

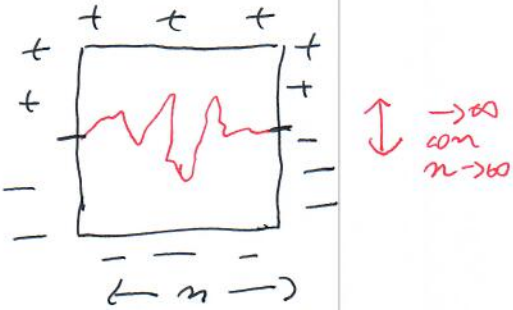


Nella rappresentazione in termini delle variabili di contorno c'è necessariamente un contorno "lungo" che attraversa la scatola

Cosa succede nel limite termodinamico ?

2 Scenari: Mi siedo vicino all'origine

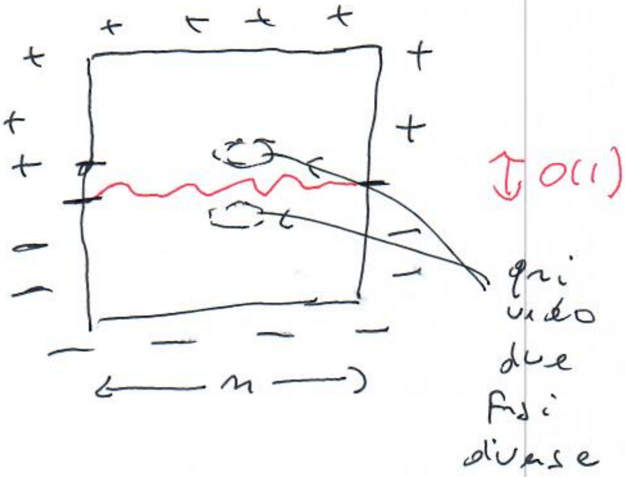
(I) Fluttuazioni dell'interfaccia grandi ~~nel~~ (= illimitate) nel limite termodinamico



Su osservabili locali vedo o la fase + o la fase −, e − per simmetria − con la stessa probabilità

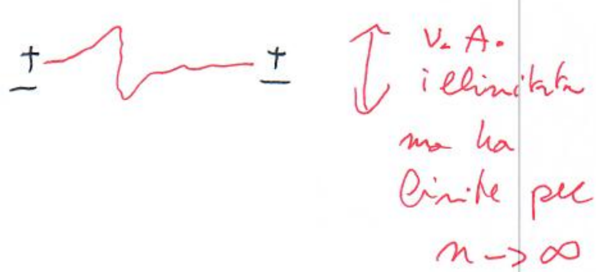
$$\mu^{+-}_{\Lambda_n} \to \frac{1}{2}\mu^{+} + \frac{1}{2}\mu^{-}$$

(II) Interfaccia localizzata: le fluttuazioni non divergono nel limite termodinamico



Nel limite termodinamico costruisco uno stato di volume infinito non invariante per traslazioni

N.B. L'affermazione non è che le fluttuazioni sono limitate, evidentemente impossibile, ma che <u>non</u> dipendono da n



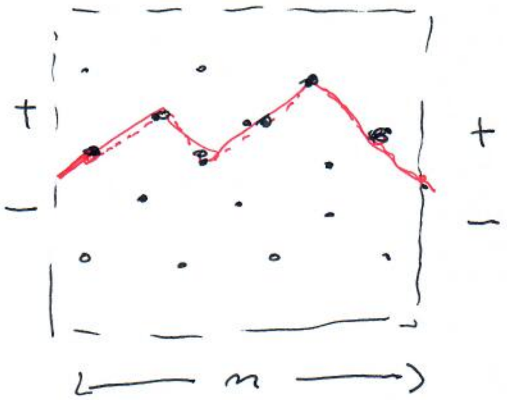
Fatto:

Ising d=2 → Scenario I

Ising d≥3 (bassa temperatura) → Scenario II

⊙ $d=2$ [Discussione euristica]

Per semplicità ruoto $\mathbb{Z}^2$ di $\pi/4$



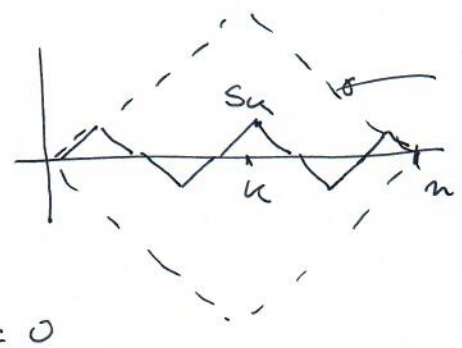
contorno "lungo"

ha lunghezza $\geq \sqrt{2}\, n$

e ci sono $\sim 2^n$ configurazioni in cui ha esattamente lunghezza $= \sqrt{2}\, n$

(ogni passo ~~...~~ va in alto o basso, n passi + vincolo che torna in 0)

Su queste configurazioni il contorno è come la passeggiata aleatoria 1 dimensionale semplice simmetrica condizionata a ritornare in 0 dopo n passi



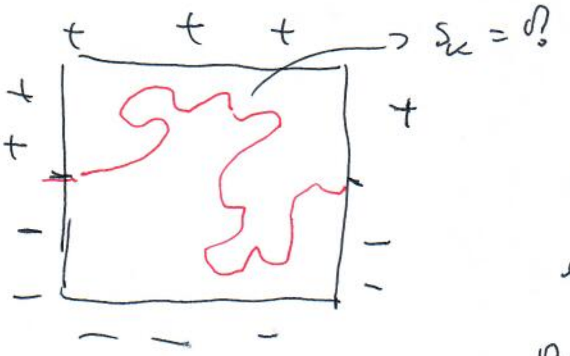
$(S_k)_{k=0,..,n}$

Pass. aleatoria con $S_0 = S_n = 0$

evidentemente $S_{\frac{n}{2}} \sim \sqrt{n}$

nel senso di $\mathbb{V}(S_{\frac{n}{2}}) \propto n$

⊙ ~~...~~ Ci sono altre configurazioni di σ in cui il contorno lungo non è una passeggiata aleatoria

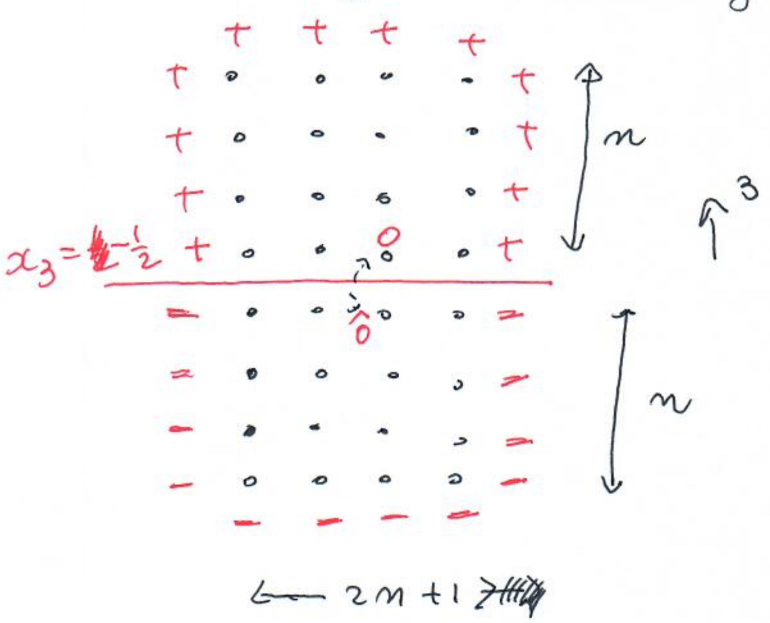


queste configurazioni sono però sfavorite ~~energ~~ energeticamente (il contorno è più lungo) e per J grande non sono rilevanti

Effettivamente è stato dimostrato che l'interfaccia riscalata converge ad una passeggiata aleatoria

③ $d \geq 3$. Costruzione stati di Dobrushin [$d=3$, ma è inessenziale]
Dimostrazione assai più facile dovuta a van Beijeren.

Conviene organizzarsi una geometria facile



$x_1, x_2 = -n, \dots, n$

$x_3 = \underbrace{-n, \dots, -1}_{\to \text{ vede } -}$

$\underbrace{0, 1, \dots, n-1}_{\to \text{ vede } +}$

$$\Lambda_n = \underbrace{\Lambda_n^-}_{= \{x : x_3 < 0\}} \cup \underbrace{\Lambda_n^0}_{= \{x : x_3 = 0\}} \cup \underbrace{\Lambda_n^+}_{= \{x : x_3 > 0\}}$$

(Λ_n^- immagine speculare di $\Lambda_n^+ \cup \Lambda_n^0$ rispetto $x_3 = -\frac{1}{2}$)

~~se $x \in \Lambda_n^+$ chiamo $\hat{x} \in \Lambda_n^-$ la sua immagine speculare~~

Ci organizziamo un accoppiamento con Ising $d=2$ seduto sul piano $x_3 = 0$

(Ising $d=3$, $h=0$)

valore critico in $d=2$

__Teo__ Se $J > J_c(2)$

$\exists\ \delta = \delta(J) > 0$ T.C. $\forall\ n$

-> condizioni al bordo di Dobrushin

$$\mu^{\pm}_{\Lambda_n}(\sigma_0) \geq \delta \quad , \quad \mu^{\pm}_{\Lambda_n}(\sigma_{\hat{0}}) \leq -\delta$$

immagine speculare di 0 rispetto $x_3 = -\frac{1}{2}$

__OSS__ se μ è un punto di accumulazione di $\{\mu^{\pm}_{\Lambda_n}\}_{n \geq 0}$ ($\exists$ per compattezza)

μ è stato di Gibbs di volume infinito

con $\mu(\sigma_0) \neq \mu(\sigma_{\hat{0}})$ $\Rightarrow$ __non__ invariante per traslazioni

• Via argomento di Peierls (transizione di fase Ising $d=2$), il Teorema segue direttamente dal prossimo lemma

Lemma

Sia $\nu^{+}_{\Lambda_n^0}$ Ising $d=2$ $(h=0)$ su Λ_n^0

$x \in \Lambda_n^0$
$$\mu^{\pm}_{\Lambda_n}(\sigma_x) \geq \nu^{+}_{\Lambda_n^0}(\sigma_x)$$

dim Accoppiamo $\mu^{\pm}_{\Lambda_n}$ con $\nu^{+}_{\Lambda_n^0}$ ed utilizziamo le diseguaglianze di Griffith.

Vediamo come:

σ_x ~~voci~~ $x \in \Lambda_n$ variabili per $\mu^{\pm}_{\Lambda_n}$

τ_y ~~[illegible]~~ $y \in \Lambda_n^0$ " " $\nu^{+}_{\Lambda_n^0}$

Per $x \in \Lambda_n^+ = \{x \in \Lambda_n : x_3 > 0\}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

$x' \in \Lambda_n^-$ definito da $x' = (x_1, x_2, -x_3)$

~~Intas~~

Per $x \in \Lambda_n^+$ introduco

$$s_x = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_{x'}) \qquad t_x = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_{x'})$$

mentre per $x \in \Lambda_n^0$

$$s_x = \frac{1}{2}(\sigma_x + \tau_x) \qquad t_x = \frac{1}{2}(\sigma_x - \tau_x)$$

oss

corrispondenza biunivoca

$$(\sigma, \tau) \in \Omega_{\Lambda_n} \times \Omega_{\Lambda_n^0} \leftrightarrow (s_x, t_x) \quad x \in \Lambda_n^+ \cup \Lambda_n^0$$

Inoltre

- $s_x, t_x = -1, 0, +1$

e

$$s_x = 0 \iff t_x = \pm 1$$

$$s_x = \pm 1 \iff t_x = 0$$

$$\sigma_x = s_x + t_x \qquad x \in \Lambda_n^+ \cup \Lambda_n^0$$

$$\sigma_x = s_x - t_x \qquad x \in \Lambda_n^-$$

$$\tau_x = s_x - t_x \qquad x \in \Lambda_n^0$$

L'affermazione del lemma è in effetti equivalente a

$$\Big(\mu^{\pm}_{\Lambda_n} \otimes \nu^{+}_{\Lambda_n^0}\Big)(t_x) \geq 0 \qquad x \in \Lambda_n^0$$

accoppiamento prodotto

Vogliamo usare disuguaglianze di Griffith $[\mu(\sigma_A) \geq 0]$ per

$$\mu^{\pm}_{\Lambda_n} \otimes \nu^{+}_{\Lambda_n}$$

nelle variabili s_x, t_x $\qquad x \in \Lambda_n^0 \cup \Lambda_n^+$

- Serve Hamiltoniana ferromagnetica
- Come la mettiamo con il fatto che σ, τ possono essere zero ??

$$H_{\Lambda_n}(\sigma \mid \pm) + H_{\Lambda_n^0}(\tau \mid +)$$

lo dobbiamo scrivere nelle variabili s, t

Vari casi primi vicini

- $\{x,y\} \subset \Lambda_n^+$

$$\sigma_x \sigma_y = (s_x + t_x)(s_y + t_y)$$

$\{x',y'\} \subset \Lambda_n^-$

$$\sigma_{x'} \sigma_{y'} = (s_x - t_x)(s_y - t_y)$$

$\to$ rimane $2(s_x s_y + t_x t_y)$

- $\{x,y\}$ a cavallo tra Λ_n^+ e suo bordo (con +)

$x \in \Lambda_n^+$, $y \notin \Lambda_n^+$

$$\sigma_x \sigma_y = (s_x + t_x) + \; = s_x + t_x$$

$\{x',y'\}$ a cavallo tra Λ_n^- e suo bordo (con −)

$x' \in \Lambda_n^-$

$$\sigma_{x'} \sigma_{y'} = (s_x - t_x) - \; = -s_x + t_x$$

$\to$ rimane $2t_x$

[buone notizie: vede bordo +]

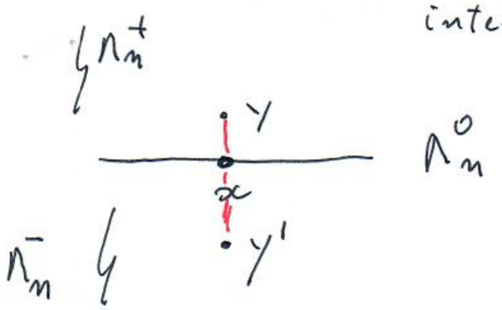
- ~~$\{x,y\}$ a cavallo tra Λ_n^+ e Λ_n^0 $[x \in \Lambda_n^0]$~~

~~$\sigma_x \sigma_y = (s_x + t_x)(s_y + t_y)$~~

~~$\{x',y'\}$ a cavallo tra Λ_n^- e Λ_n^0 $[x \in \Lambda_n^0]$~~

~~$\sigma_{x'} \sigma_{y'} = (s_x + t_x)(s_y + t_y)$~~

~~$\to$ rimane $s_x s_y$~~



interazione (per σ) a cavallo con Λ_n^0

$$\sigma_y = s_y + t_y$$

$$\sigma_{y'} = s_y - t_y \qquad \sigma_x = (s_x + t_x)$$

$$\sigma_x(\sigma_y + \sigma_y) = (s_x + t_x)(s_y + \cancel{t_y} + s_y - \cancel{t_{y'}})$$

buone notizie: solo ferromagnetica

$\{x, y\} \subset \Lambda_n^0$

$$\sigma_x \sigma_y = (s_x + t_x)(s_y + t_y)$$

$$\tau_x \tau_y = (s_x - t_x)(s_y - t_y)$$

rimane $2(s_x s_y + t_x t_y)$

$\{x, y\}$ a cavallo tra Λ_n^0 e suo bordo [+ sia per σ che per τ]

$x \in \Lambda_n^0$

$$\sigma_x \sigma_y = (s_x + t_x) +$$

$$\tau_x \tau_y = (s_x - t_x) +$$

rimane $2 s_x$

buone notizie: bordo +

Conclusione:

Nelle variabili s, t $\quad H_{\Lambda_n}(\sigma|\pm) + H_{\Lambda_n^0}(\tau|+)$

è ferromagnetica (accoppiamento $-J$, $J > 0$)

con bordo + : siamo nell'ambito di Griffith-

- Come la mettiamo che s_x, t_x possono valere zero?

$$\left(\mu^{\pm}_{\Lambda_n^+} \otimes \nu^{+}_{\Lambda_n^0} \right)(\cdot\cdot) = \frac{1}{Z} \sum_{s,t} (\cdot\cdot)\, e^{\underbrace{-H_{\Lambda_n}(\sigma|\pm) - H_{\Lambda_n^0}(\tau|+)}_{\text{scritto prima nelle variabili } s,t}}$$

$$s,t = (s_x, t_x), \quad x \in \Lambda_n^+ \cup \Lambda_n^0$$

dichiariamo ~~ovvero~~ il luogo degli $x \in \Lambda_n^+ \cup \Lambda_n^0$ ove σ_x vale zero

$$= \frac{1}{Z} \sum_{A \subset \Lambda_n^+ \cup \Lambda_n^0} \sum_{\substack{s,t: \\ s|_A = 0 \\ s|_{A^c} \neq 0}} (\cdot\cdot)\, e^{-[H_{\Lambda_n}(\sigma|\pm) + H_{\Lambda_n^0}(\tau|+)]}$$

restrizione di s su A e A^c

Fisso $A \subset \Lambda_n^+ \cup \Lambda_n^0$

- $x \in A \iff s_x = 0$ (e quindi $t_x = \pm 1$)
- $x \notin A \iff s_x = \pm$ (e quindi $t_x = 0$)

In ogni caso ad A fissato ho una variabile binaria in ogni $x \in A \cup A^c = \Lambda_n^+ \cup \Lambda_n^0$

con Hamiltoniana ferromagnetica

$$\Rightarrow \text{(Griffith)} \quad \sum_{\substack{s,t: \\ s|_A = 0 \\ s|_{A^c} \neq 0}} (t_x)\, e^{-[H_\Lambda(\cdot|+) + H_{\Lambda^0}(\cdot|-)]} \geq 0$$

Ora $\sum_A \dots$

è somma di termini tutti ≥ 0

⑥ struttura stati di Gibbs di volume infinito per Ising $d \geq 2$ [~~senza~~ dimostrazioni]

$h = 0$, ~~fisso~~ $J \geq J_c(d)$

[altrimenti sappiamo essere un singoletto]

se $J > J_c$ ci sono μ^+ e μ^- invarianti per traslazioni ed estremali.

Per quanto riguarda gli stati invarianti per traslazioni, questo è tutto

$$\mathcal{G}_\theta = \{ \alpha \mu^- + (1-\alpha) \mu^+, \quad \alpha \in [0,1] \}$$

stati di Gibbs di volume infinito invarianti per traslazioni

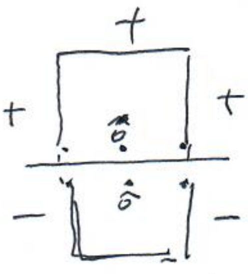
μ^- e μ^+ sono le ! fasi pure invarianti per traslazioni

$d = 2$ Non ci sono stati di Gibbs non invarianti per traslazione $\quad \mathcal{G}(d=2) = \mathcal{G}_\theta(d=2)$

$d \geq 3$ Ci sono gli stati di Dobrushin (non invarianti per traslazioni) appena costruiti.

MENDA STATI DI DOBRUSHIN

Geometria teorema:



cioè

$$\mu^{\pm}_{\Lambda_n}(\sigma_0) = -\mu^{\pm}_{\Lambda_n}(\sigma_{\hat{0}})$$

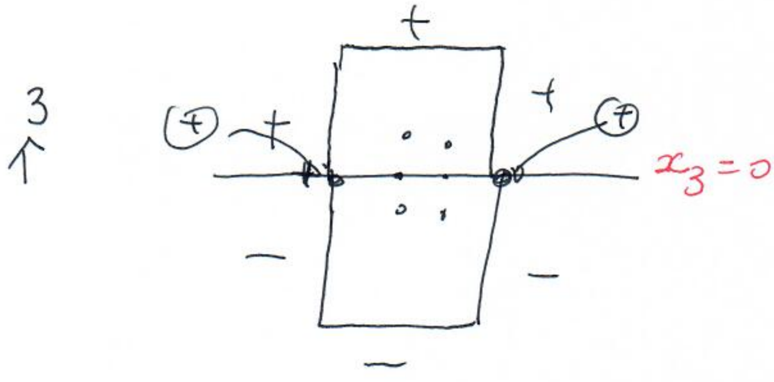
immagine speculare di 0 rispetto $x_3 = -\frac{1}{2}$

Λ_n simmetrico rispetto $x_3 = -\frac{1}{2}$

e − su $x_3 < 0$

+ su $x_3 \geq 0$

Geometria lemma:



$$\Lambda_n = \Lambda_n^+ \cup \Lambda_n^0 \cup \Lambda_n^-$$

Λ_n^- immagine speculare di Λ_n^+ rispetto $x_3 = 0$

ho infatti accoppiato σ_x $x \in \Lambda_n^+$

con $\sigma_{x'}$ $x' \in \Lambda_n^-$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

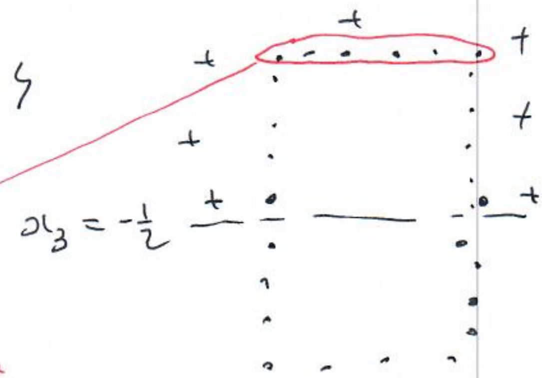
$x' = (x_1, x_2, -x_3)$

Effettivamente:

geometria lemma $\neq$ geometria teorema

Basta usare FKG (monotonia in h) per passare da geometria lemma a geometria teorema

$$\Lambda_n^{teo} = \Lambda_n^{lemma} \setminus \{ x_3 = n \}$$



Se elimini questo piano passi da Λ_n^{lemma} a $\Lambda_n^{teorema}$

per monotonia FKG ($h \uparrow +\infty$ sul piano levato)

$$\mu^{\pm}_{\Lambda_n^{teo}}(\sigma_0) \geq \mu^{\pm}_{\Lambda_n^{lemma}}(\sigma_0) \geq \nu^{+}_{\Lambda_n^{0,lemma}}(\sigma_0) \geq \delta > 0$$