TEO ~~(Holley)~~ $\Omega_\Lambda = \{-1,1\}^\Lambda$ $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

$\mu,\nu \in \mathcal{P}(\Omega_\Lambda)$

$(\sigma \wedge \tau)_x = \sigma_x \wedge \tau_x$ → minimo

$(\sigma \vee \tau)_x = \sigma_x \vee \tau_x$ → massimo $\quad x \in \Lambda$

$$\mu(\sigma \wedge \tau)\,\nu(\sigma \vee \tau) \geq \mu(\sigma)\,\nu(\tau) \implies \mu \leq \nu$$

dim

Argomento di Holley via dinamica (catene di Markov)
argomento facoltativo

Induzione su $|\Lambda|$

- se $|\Lambda| = 1$ $\quad f \nearrow \iff F(\sigma) = \alpha\sigma + \beta \quad \alpha \geq 0$

$\underset{f\nearrow}{\mu(F) \leq \nu(F)} \iff \mu(1) \leq \nu(1)$

L'ipotesi ci dice, scegliendo ~~...~~ $\sigma = 1,\ \tau = -1$

$\mu(-1)\,\nu(1) \geq \mu(1)\,\nu(-1)$

ovvero $\Updownarrow$

$[1-\mu(1)]\,\nu(1) \geq \mu(1)\,[1-\nu(1)]$

$\Updownarrow$

$\nu(1) \geq \mu(1)$

- Diciamo $\Lambda = \{1,\dots,n\}$, ~~...~~ passo induttivo

μ_1, ν_1 marginali di μ,ν su 1

$\implies$ soddisfano condizione $\implies$ (caso $|\Lambda|=1$) $\mu_1 \leq \nu_1$

Vedi Lemma

$\mu_1 \leq \nu_1$

quindi, per teorema generale, $\exists$ accoppiamento di μ_1 e ν_1 sopra la diagonale.

Siano ora
$$\mu(\cdot \mid \sigma_1 = \omega) \quad e \quad \nu(\cdot \mid \sigma_1 = \tilde{\omega})$$
le prob. condizionali su $\{-1,1\}^{\{2,\dots,n\}}$

Se $\omega \leq \tilde{\omega}$ allora $\mu(\cdot \mid \sigma_1 = \omega)$ e $\nu(\cdot \mid \sigma_1 = \tilde{\omega})$ soddisfano all'ipotesi la condizione FKG.

Infatti se $\omega \leq \tilde{\omega}$

$$\mu(\sigma \wedge \tau \mid \sigma_1 = \omega)\, \nu(\sigma \vee \tau \mid \sigma_1 = \tilde{\omega})$$

$$= \frac{\mu(\omega\ \sigma \wedge \tau)}{\mu(\sigma_1 = \omega)} \cdot \frac{\nu(\tilde{\omega}\ \sigma \vee \tau)}{\nu(\sigma_1 = \tilde{\omega})}$$

$$= \frac{\mu(\omega\sigma \wedge \tilde{\omega}\tau)}{\mu(\sigma_1 = \omega)} \cdot \frac{\nu(\omega\sigma \vee \tilde{\omega}\tau)}{\nu(\sigma_1 = \tilde{\omega})}$$

$$\geq \frac{\mu(\omega\sigma)}{\mu(\sigma_1 = \omega)} \; \frac{\nu(\tilde{\omega}\tau)}{\nu(\sigma_1 = \tilde{\omega})} = \mu(\sigma \mid \sigma_1 = \omega)\, \nu(\tau \mid \sigma_1 = \tilde{\omega})$$

completo ora il passo induttivo. Sia $f \nearrow$ su Ω_n

$$\mu(f) - \nu(f) = \sum_{\omega} \mu_1(\omega)\, \mu(f \mid \sigma_1 = \omega) - \sum_{\tilde{\omega}} \nu_1(\tilde{\omega})\, \nu(f \mid \sigma_1 = \tilde{\omega})$$

$$= \sum_{\omega, \tilde{\omega} \in \pm 1} \lambda(\omega, \tilde{\omega}) \left[\mu(f \mid \sigma_1 = \omega) - \nu(f \mid \sigma_1 = \tilde{\omega}) \right]$$

è sopra la diagonale: è $\neq 0$ solo se $\tilde{\omega} \geq \omega$

≤ 0 per ipotesi induttiva

≤ 0

OSS
L'affermazione $\mu \le \nu$ è stabile per marginalizzazione

ovvero se $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega_\Lambda)$ soddisfano $\mu \le \nu$

e $\hat\mu, \hat\nu$ marginali di μ, ν su $\Omega_{\hat\Lambda}$ con $\hat\Lambda \subset \Lambda$

$\Rightarrow \hat\mu \le \hat\nu$

infatti:

$\forall f \nearrow$ su Ω_Λ $\quad \mu(f) \le \nu(f)$

prendo f che dipende solo da σ_x, $x \in \hat\Lambda \subset \Lambda$

e ricavo $\hat\mu(f) \le \hat\nu(f)$ ovvero $\hat\mu \le \hat\nu$

lemma La condizione

$$\mu(\sigma \wedge \tau)\, \nu(\sigma \vee \tau) \ge \mu(\sigma)\, \nu(\tau)$$

è stabile per marginalizzazione

dim dichiaro $\Lambda = \{1, \dots, n\}$

basta verificare che $\hat\mu, \hat\nu$ marginali di μ, ν su $\{1, \dots, n-1\}$ soddisfano condizione

$\sigma, \tau \in \Omega_{\hat\Lambda}$ $\qquad \hat\mu(\sigma) = \mu(\sigma +) + \mu(\sigma -)$

$\qquad \hat\nu(\tau) = \nu(\tau +) + \nu(\tau -)$

~~dalla condizione su Ω_Λ ricavo~~

$$\cancel{\hat\mu(\sigma)\hat\nu(\tau) \le \sum_{\omega, \tilde\omega \in \{-1,+1\}} \mu((\sigma\wedge\tau)\,\omega\wedge\tilde\omega)\, \nu((\sigma\wedge\tau)\,\omega\vee\tilde\omega)}$$

$$\cancel{= \mu(\sigma\wedge\tau -)\nu(\sigma\vee\tau -) + \mu(\sigma\wedge\tau -)\nu(\sigma\vee\tau +) + \mu(\sigma\wedge\tau -)\nu(\sigma\vee\tau +)}$$

$$\cancel{+ \mu(\sigma\wedge\tau +)\nu(\sigma\vee\tau +)}$$

$\boxed{7.6}$

Siano:

$$\mu(\sigma-) = t_1 \qquad \mu(\sigma+) = t_3 \qquad \nu(\tau-) = t_2 \qquad \nu(\tau+) = t_4$$

$$\mu(\sigma\wedge\tau-) = s_1 \qquad \mu(\sigma\wedge\tau+) = s_3 \qquad \nu(\sigma\vee\tau-) = s_2 \qquad \nu(\sigma\vee\tau+) = s_4$$

<u>so</u>: [μ, ν soddisfano condizione]

$$s_1 s_2 \geq t_1 t_2 \qquad s_3 s_4 \geq t_3 t_4$$

$$s_1 s_4 \geq t_1 t_4 \qquad s_1 s_4 \geq t_2 t_3$$

<u>voglio</u> [$\hat{\mu}, \hat{\nu}$ soddisfano condizione]

$$(s_1+s_3)(s_2+s_4) \geq (t_1+t_3)(t_2+t_4)$$

Ora (so) $\Rightarrow$ (voglio) qualunque siano $s_i, t_i > 0$, $i=1,\dots,4$

<u>infatti</u>:

$$(s_1+s_3)(s_2+s_4) - (t_1+t_3)(t_2+t_4) \quad \left[\ s_3 \geq \frac{t_3 t_4}{s_4},\ s_2 \geq \frac{t_1 t_2}{s_1}\ \right]$$

$$\geq \left(s_1 + \frac{t_3 t_4}{s_4}\right)\left(\frac{t_1 t_2}{s_1} + s_4\right) - (t_1+t_3)(t_2+t_4)$$

$$= \frac{1}{s_1 s_4}\left\{ (s_1 s_4 + t_3 t_4)(t_1 t_2 + s_1 s_4) - s_1 s_4 (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_4 + t_3 t_4) \right\}$$

$$= \frac{1}{s_1 s_4}\, \underbrace{(s_1 s_4 - t_1 t_4)}_{\geq 0}\, \underbrace{(s_1 s_4 - t_2 t_3)}_{\geq 0} \geq 0$$

(so)

$\square$

COR

Sia $\mu \in \mathcal{P}(\Omega_\Lambda)$ t.c.

$$\mu(\sigma \wedge \tau)\,\mu(\sigma \vee \tau) \geq \mu(\sigma)\,\nu(\tau)$$

covarianza tra f e g

se $f, g \uparrow$ allora $\mu(f, g) \geq 0$

dim posso supporre $g > 0$

uso teorema con $\mu = \mu$ $\quad d\nu = \dfrac{g\, d\mu}{\mu(g)}$

Verifico che soddisfano la condizione FKG

$$\mu(\sigma \wedge \tau)\,\nu(\sigma \vee \tau) = \mu(\sigma \wedge \tau)\,\underbrace{g(\sigma \vee \tau)}_{\geq\, g(\tau)}\,\frac{\mu(\sigma \vee \tau)}{\mu(g)}$$

$$\geq \mu(\sigma \wedge \tau)\,\mu(\sigma \vee \tau)\,\frac{g(\tau)}{\mu(g)}$$

ipotesi

$$\geq \mu(\sigma)\,\mu(\tau)\,\frac{g(\tau)}{\mu(g)} = \mu(\sigma)\,\nu(\tau)$$

Quindi per il teorema, se $f \uparrow$

$$\mu(f) \leq \nu(f)$$

ma $\nu(f) = \dfrac{\mu(fg)}{\mu(g)}$ e ricavo $\mu(f)\cdot\mu(g) \leq \mu(fg)$

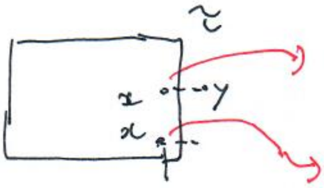
• Ritorno al contesto di Ising

$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ $\quad J \geq 0$ (Ferromagnetica)

$h = \{h_x, x \in \Lambda\}$ ogni sito il suo campo magnetico

$$H_{\Lambda,h}(\sigma) = -J \sum_{\{x,y\} \subset \Lambda} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x$$

Non ci sono condizioni al bordo, ma in effetti sono incluse, basta dichiarare h_x opportuno per $x \in \partial_- \Lambda$



$h_x \mapsto h_x + J \tau_y \qquad y \notin \Lambda$

$h_x \mapsto h_x + J \sum_{\substack{y \notin \Lambda \\ |x-y|=1}} \tau_y$

$$\mu_{\Lambda,h}(\sigma) = \frac{1}{Z_{\Lambda,h}} e^{-H_{\Lambda,h}(\sigma)}$$

<u>Teo</u> $J \geq 0$ (Ferromagnetico)

$h \leq h'$ (ordine parziale in $\mathbb{R}^\Lambda$) $\Rightarrow \mu_{\Lambda,h} \leq \mu_{\Lambda,h'}$

<u>OSS</u> se aumenta h la prob $\mu_{\Lambda,h}$ sale

Funziona anche se non solo a primi vicini dim Basta verificare la condizione per FKG

$$\mu_{\Lambda,h}(\sigma\wedge\tau)\,\mu_{\Lambda,h'}(\sigma\vee\tau) \geq \mu_{\Lambda,h}(\sigma)\,\mu_{\Lambda,h'}(\tau)$$

$\Updownarrow$ (le normalizzazioni $Z_{\Lambda,h}$, $Z_{\Lambda,h'}$ si cancellano)

$$H_{\Lambda,h}(\sigma\wedge\tau) + H_{\Lambda,h'}(\sigma\vee\tau) \leq H_{\Lambda,h}(\sigma) + H_{\Lambda,h'}(\tau)$$

$\Uparrow$ verifico una disuguaglianza puntuale, $J \geq 0$

$$(\sigma\wedge\tau)_x(\sigma\wedge\tau)_y + (\sigma\vee\tau)_x(\sigma\vee\tau)_y \geq \sigma_x\sigma_y + \tau_x\tau_y, \quad |x-y|=1$$

$$h_x(\sigma\wedge\tau)_x + h'_x(\sigma\vee\tau)_x \geq h_x\sigma_x + h'_x\tau_x, \quad x\in\Lambda$$

- Verifico la seconda

$\sigma_x = \tau_x$ è vera con $=$

$\sigma_x = -1$, $\tau_x = +1$: $\quad h_x\sigma_x + h'_x\tau_x \geq h_x\sigma_x + h'_x\tau_x$ sì

$\sigma_x = 1$, $\tau_x = -1$: $\quad h_x\tau_x + h'_x\sigma_x \geq h_x\sigma_x + h'_x\tau_x$

~~si ipotesi $h'_x \geq h_x$~~ $\quad h'_x - h_x \geq h_x - h'_x$

$\Updownarrow$

$h'_x \geq h_x$ sì

- Verifico la prima. Ci sono 16 casi ($\sigma_x\,\tau_x\,\sigma_y\,\tau_y$) ma in molti casi (14) è vera con $=$

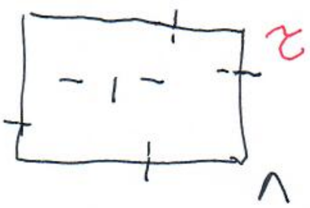
Verifico $\sigma_x = \tau_y = 1 \quad \sigma_y = \tau_x = -1$

$$(-1)(-1) + 1\cdot 1 \overset{?}{\geq} -1 + (-1) \quad \text{sì}$$

• Ising con h costante ma con condizioni al bordo

$$H_\Lambda(\sigma|\tau) = -J \sum_{\substack{\{x,y\}\cap\Lambda\neq\emptyset \\ |x-y|=1}} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x\in\Lambda} \sigma_x$$

devi leggere $\sigma_x = \tau_x$ se $x \notin \Lambda$



$\mu_\Lambda^\tau(\cdot)$ misura di Gibbs in Λ con bordo τ

$$\mu_\Lambda^\tau(\sigma) = \frac{e^{-H_\Lambda(\sigma|\tau)}}{Z_\Lambda^\tau}$$

<u>TEO</u>

(1) $\mu_\Lambda^- \le \mu_\Lambda^\tau \le \mu_\Lambda^+ \qquad \forall \tau \in \Omega_{\Lambda^c}$

(2) se $\Lambda \subset \Lambda'$

$$\mu_{\Lambda'}^+ \le \mu_\Lambda^+ \quad , \quad \mu_{\Lambda'}^- \ge \mu_\Lambda^-$$

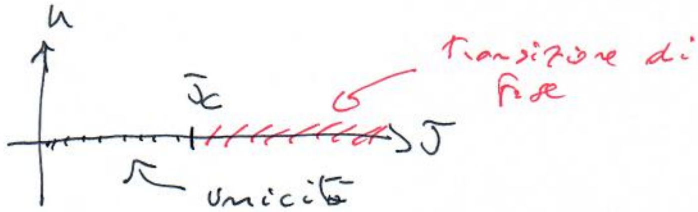
(3) $\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mu_\Lambda^\pm =: \mu^\pm$ il limite $\exists$ (<u>non</u> di compattezza, di monotonia)

(4) $\mu^\pm$ sono stati di Gibbs ~~inv~~ (di volume infinito) invarianti per traslazioni

(5) se $\mu \in \mathcal{G}$ (= stati di Gibbs di volume infinito)

$$\Rightarrow \quad \mu^- \le \mu \le \mu^+$$

Dalle monotonie di questo teorema ricaviamo il diagramma di fase per $h=0$



$$m^*(J) := \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mu^+_\Lambda(\sigma_0)$$

(limite $\exists$ per monotonia)

Sia $J_c = J_c(d)$ definito da

$$J_c = \sup\{J>0 : m^*(J)=0\}$$
$$= \inf\{J>0 : m^*(J)>0\}$$

Cor

$m^*(J)=0 \Rightarrow \exists!$ stato di Gibbs di volume infinito

dim

sia $\mu \in \mathcal{G}$ da (5) $\mu^- \le \mu \le \mu^+$

~~Bas~~ Basta $\mu^- = \mu^+$

ora $\mu^- \le \mu^+$, $\mu^\pm$ sono invarianti per traslazione

e $\mu^+(\sigma_0) = m^*(J) = -\mu^-(\sigma_0)$

quindi

$m^*(J)=0 \Rightarrow \mu^+$ e μ^- hanno gli stessi 1-marginali

e quindi $\mu^- = \mu^+$ $\square$

OSS Dobrushin $\Rightarrow J_c > 0$

$d \ge 2$ Peierls + Griffith $\Rightarrow J_c < +\infty$

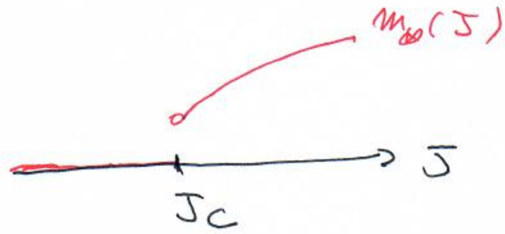
$m^*(J_c) = ?$

$d=2$ $m^*(J_c)=0$ da soluzione esatta di Onsager

$d=3$ $m^*(J_c) = ?$

è ridicolo: nessuno crede la situazione

posso avere



ma non si sa dimostrare

d grande abbastanza si sa dimostrare

<u>dim</u> <u>TEO</u>

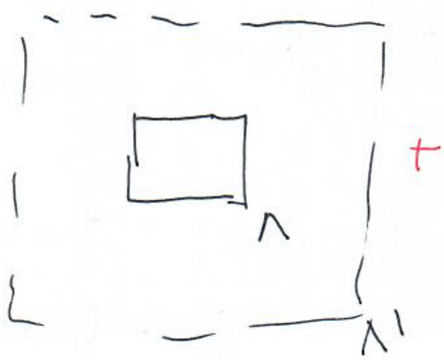
(1), (2)

conseguenze immediate della monotonia

$$h \le h' \Rightarrow \mu_{\Lambda,h} \le \mu_{\Lambda,h'}$$

in (1) $h'-h$ dovuto alle differenti condizioni al bordo

in (2)



posso $h_x \uparrow +\infty$ se $x \in \Lambda' \setminus \Lambda$

così trovo

$$\mu^+_{\Lambda,h} = \lim_{\substack{h_x \to +\infty \\ x \in \Lambda'\setminus\Lambda}} \mu^+_{\Lambda',h}$$

(3) Per compattezza di Ω basta

$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mu^+_\Lambda(f)\ \exists \quad \forall$ funzione locale

se $f \uparrow$ lim $\exists$ per la monotonia in (2)

Ora

f locale = combinazione lineare (finita) $\{f \uparrow\}$

infatti

$$\chi_A(\sigma) = \prod_{x \in A} \frac{1+\sigma_x}{2} = \begin{cases} 1 & \sigma_x = 1 \ \forall x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è $\uparrow$

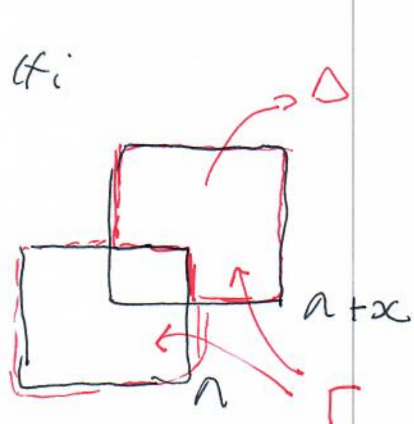
Dato $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ $\quad \{\chi_A\}_{A \subset \Lambda}$ è una base per $f : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R}$

(4) Dalla teoria generale

$\mu^\pm$ come limiti di stati di Gibbs di volume finito sono stati di Gibbs di volume infinito

(~~5~~) sono invarianti per traslazioni. Infatti

$$\underbrace{\mu^+_\Gamma}_{\downarrow\ \mu^+} \leq \underbrace{\mu^+_{\Lambda+x}}_{\downarrow\ \mu^+ \circ \vartheta_x} \leq \underbrace{\mu^+_\Delta}_{\downarrow\ \mu^+}$$



(5.) Sia $\mu \in \mathcal{G}$. Valgono DLR $\mu = \mu\,\mu_\Lambda^\cdot \quad \forall \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ 115

ovvero

$\forall f \in \mathcal{E}(\Omega)$

$$\mu(f) = \int \mu(d\tau)\, \underbrace{\mu_\Lambda^\tau(f)}_{\le \mu_\Lambda^+(f)}$$

se $f \uparrow$

ovvero

$\mu(f) \le \mu_\Lambda^+(f)$ ora $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$

e trovo $\mu(f) \le \mu^+(f)$ cioè $\mu \le \mu^+$ ☒

<u>Prop</u>

$\mu^\pm \in \mathcal{G}_e$ (stati di Gibbs estremali)

<u>dim</u> devo mostrare

$\mu^+ = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G} \quad \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu^+$

Poiché $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}$ da (5) ricavo

$\mu_1(\sigma_x) \le \mu^+(\sigma_0) = m^*(\beta)$

se vale $=$ $\forall x$ allora $\mu_1 = \mu^+$

(per teorema generale di ordine stocastico)

Sia x : $\mu_1(\sigma_x) < \mu^+(\sigma_x) = \mu^+(\sigma_0)$

trovo

$$\mu^+(\sigma_0) = \alpha\mu_1(\sigma_x) + (1-\alpha)\underbrace{\mu_2(\sigma_x)}_{\le \mu^+(\sigma_x)} < \mu^+(\sigma_0)$$

non si poteva : $\mu^+ = \mu_1$ ☒