① Stima dal basso

Prima di concludere la dimostrazione del teorema di Sanov, qualche risultato generale

- La stima dal basso è in effetti un'affermazione locale

Lemma (Contesto assiomatico LDP)

$\forall A$ aperto $\quad \underline{\lim}_n \frac{1}{n} \lg \mu_n(A) \geq - \inf_A I$

$$\Updownarrow$$

$\forall x, \forall \mathcal{O} \ni x$ (intorno aperto) $\quad \underline{\lim}_n \frac{1}{n} \lg \mu_n(\mathcal{O}) \geq - I(x)$

dim $\Downarrow$: scegli $A = \mathcal{O}$ e $\inf_A I \leq I(x)$

$\Uparrow$ Fisso A aperto. Per def di inf

$\exists x_m \in A$ t.c. $\inf_A I \geq I(x_m) - \frac{1}{m}$

poiché A è aperto $\exists \mathcal{O}_m$ t.c. $x_m \in \mathcal{O}_m \subset A$

quindi

$$\underline{\lim}_n \frac{1}{n} \lg \mu_n(A) \geq \underline{\lim}_n \frac{1}{n} \lg \mu_n(\mathcal{O}_m) \overset{\text{ipotesi}}{\geq} - I(x_m) \overset{\text{def di } x_m}{\geq} - \inf_A I - \frac{1}{m}$$

ora $m \to \infty$ e concludo ☒

- Se ho trovato la stima dal basso con un certo I_0, la posso migliorare automaticamente facendo diventare I_0 lsc
  (l'illustra perché assunto che I fosse lsc)

$\mathcal{X}$ spazio polacco $\qquad I : \mathcal{X} \to [0,+\infty]$

$sc^- I$ = più grande funzionale lsc sotto I

è una operazione locale su I

$$(sc^- I)(x) = \sup_{\substack{O \ni x \\ \text{intorni aperti}}} \ \inf_{y \in O} I(y)$$

in termini di successioni

$$(sc^- I)(x) = \inf_{x_n \to x} \ \underline{\lim}_{n} \ I(x_n)$$

<u>Lemma</u> Se vale LB con I

$\Rightarrow$ vale LB con $sc^- I$

<u>dim</u> facile (è un esercizio) usando la caratterizzazione locale (lemma prima) di LB

<u>oss</u> Poiché $sc^- I \leq I$

UB con I $\Rightarrow$ UB con $sc^- I$

ma è un peggioramento

- Ideologia ~~1~~ stima dal basso

μ_n fa legge dei grandi numeri con $\bar{x}$

Dato $x \in \mathcal{X}$ devi capire come cambiare μ_n in modo che la legge dei grandi numeri diventi x

Se hai trovato il cambio più conveniente (misurato da $\text{Ent}(\cdot | \mu_n)$) hai fatto la stima dal basso

<u>Lemma</u>

supponi

$\forall x \in \mathcal{X} \quad \exists \quad \mu_n^x$ T.C.

- $\mu_n^x \longrightarrow \delta_x$
- $\overline{\lim_n} \ \frac{1}{n} \ \text{Ent}(\mu_n^x | \mu_n) \leq I(x)$

Allora vale la stima dal basso con tasso I

<u>dim</u> μ, ν ~~P(B)(X)~~ probabilità su $\mathcal{X}$

$$\text{Ent}(\mu|\nu) \geq \nu(B) \log \frac{\nu(B)}{\mu(B)} + \nu(B^c) \log \frac{\nu(B^c)}{\mu(B^c)} \qquad B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

lo dimostro dopo

$\mu \longrightarrow \mu_n \qquad \nu \longrightarrow \mu_n^x \qquad$ e $\qquad B = \mathcal{O}$ intorno di x

ricavo

$$\overbrace{\mu_n^x(\theta)\log\mu_n^x(\theta) + \mu_n^x(\theta^c)\log\mu_n(\theta^c)}^{\to 0}$$

$$-\underbrace{\mu_n^x(\theta)}_{\to 1}\log\mu_n(\theta) - \underbrace{\mu_n^x(\theta^c)\log\mu_n(\theta^c)}_{\leq 0} \leq \mathrm{Ent}(\mu_n^x|\mu_n)$$

da cui

$$\varliminf_n \frac{1}{n}\log\mu_n(\theta) = \varliminf_n \frac{1}{n}\mu_n^x(\theta)\log\mu_n(\theta)$$

$$\geq \varliminf \Big\{ -\frac{1}{n}\mathrm{Ent}(\mu_n^x|\mu_n) + \frac{1}{n}\overbrace{[\mu_n^x(\theta)\log\mu_n^x(\theta) + \mu_n^x(\theta^c)\log\mu_n^x(\theta^c)]}^{\to 0}\Big\}$$

ipotesi

$$= -I(x)$$

Per dimostrare la prima affermazione.

Dalla formula variazionale di $\mathrm{Ent}(\cdot|\mu)$

scelgo $\quad \phi = \lambda\, 1\!\!1_B \quad \lambda > 0$

$$\mathrm{Ent}(\nu|\mu) \geq \lambda\,\nu(B) - \log[\mu(B^c) + \mu(B)e^\lambda]$$

Scegli λ ottimale e viene

$\square$

Finiamo ora la dimostrazione di Sanov

Contesto Sanov

$\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ $\qquad X_i,\ i=1,\dots,n$ iid con legge μ

$\mathbb{P}_n = \mu^{\otimes n}$ prob. su $\mathcal{X}^n$

$$\pi_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i} \qquad \pi_n : \mathcal{X}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X})$$

$P_n =$ Legge $(\pi_n) = \mathbb{P}_n \circ \pi_n^{-1}$

<u>Lemma</u> Fissa $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. $\exists$ successione $P_n^{\pi} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$ t.c.

$$P_n^{\pi} \to \delta_{\pi}$$

$$\overline{\lim_n}\ \frac{1}{n}\, Ent(P_n^{\pi} \mid P_n) \leq Ent(\pi \mid \mu)$$

<u>dim</u>

Nell'ideologia di stima dal basso.
Il modo più conveniente è cambiare la legge di X_i ma lasciarle ancora iid

$\mathbb{P}_n^{\pi} = \pi^{\otimes n}$ $\qquad$ ($Y_i,\ i=1,\dots,n$ iid con legge π)

$$P_n^{\pi} = \mathbb{P}_n^{\pi} \circ \pi_n^{-1} = \text{legge}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{Y_i}\right)$$

legge dei grandi numeri $\qquad P_n^{\pi} \longrightarrow \delta_{\pi}$

Prob. su $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ $\qquad\qquad$ Prob. su $\mathcal{X}^n$

Ora

$$Ent(P_n^{\pi} \mid P_n) \leq Ent(\mathbb{P}_n^{\pi} \mid \mathbb{P}_n)$$

immediato dalla formula variazionale:

μ, ν prob su $\mathcal{X}$, $\phi : \mathcal{X} \to \tilde{\mathcal{X}}$, $\tilde{\mu} = \mu \circ \phi^{-1}$ $\tilde{\nu} = \mu \circ \phi^{-1}$

Rimane da calcolare $\mathrm{Ent}(\mathbb{P}_n^\pi \,|\, \mathbb{P}_n)$

sono entrambe prodotto

$$\frac{d\mathbb{P}_n^\pi}{d\mathbb{P}_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{d\pi}{d\mu}(x_i)$$

$$\frac{1}{n}\mathrm{Ent}(\mathbb{P}_n^\pi \,|\, \mathbb{P}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}_n^\pi\left(\lg \frac{d\mathbb{P}_n^\pi}{d\mathbb{P}_n}\right)$$

$$= \int d\pi \, \lg \frac{d\pi}{d\mu} = \mathrm{Ent}(\pi \,|\, \mu)$$

Questa costruzione è effettivamente "legale" solo quando $\pi \ll \mu$ e $\mathrm{Ent}(\pi|\mu) < +\infty$
ma se $\mathrm{Ent}(\pi|\mu)$ ~~non~~ $= +\infty$ non c'era nulla da dimostrare.

Per x t.c. $I(x) = +\infty$ la stima dal basso (versione locale)

afferma solo

$$\mu_n(\theta) \geq 0$$

(θ intorno aperto di x)

$\boxtimes$