Teo 2 (Criterio di Dobrushin generale)

Se
$$\sup_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{y} b_{x,y} < 1$$

Allora esiste al più una $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ t.c.

$$\int \mu(d\eta)\, \mu_x^\eta(\cdot) = \mu \qquad \forall x \in \mathbb{Z}^d$$

sono [DLR per i singoletti $\mu\, \mu_x^\circ = \mu$]

Vediamo quando funziona per il modello di Ising

$$\phi_{\{x,y\}}(\sigma) = -J(y-x)\, \sigma_x \sigma_y$$

$$\sum_{X \ni 0} (|X|-1)\, |\phi_X|_\infty = \sum_{\substack{z \neq 0 \\ z \in \mathbb{Z}^d}} |J(z)| < 1$$

in particolare nel caso di primi vicini

$$2d\, J < 1$$

Prima dimostriamo Teo 1 assumendo Teo 2.

Dipende dal lemma seguente

<u>Lemma</u>

Sia ρ prob. su $\mathcal{X}$, $\phi, \psi \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X})$ (continue e limitate)

$$d\mu = \frac{d\rho \, e^{\phi}}{\rho(e^{\phi})} \qquad d\nu := \frac{d\rho \, e^{\psi}}{\rho(e^{\psi})} \qquad \mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$$

se $F \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X})$

$$|\mu(F) - \nu(F)| \leq |F|_\infty \, |\phi - \psi|_\infty$$

<u>dim</u> In passato abbiamo avuto un lemma tipo questo.
Basta interpolare (linearmente) tra μ e ν
$\mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ $t \in [0,1]$ def da

$$d\mu_t = \frac{d\rho \, e^{(1-t)\phi + t\psi}}{\rho(e^{(1-t)\phi + t\psi})} \qquad \mu_0 = \mu \quad \mu_1 = \nu$$

converge dominata

$$\nu(F) - \mu(F) = \int_0^1 dt \, \frac{d}{dt} \mu_t(F)$$

$$= \int_0^1 dt \, [\, \mu_t((\psi - \phi)F) - \mu_t(F)\, \mu_t(\psi - \phi) \,]$$

$$|\nu(F) - \mu(F)| \leq |F|_\infty \int_0^1 dt \, \mu_t |\, F \cdot [(\psi - \phi) - \mu_t(\psi - \phi)] \,|$$

$$\leq |F|_\infty \int_0^1 dt \, \mu_t |\, \psi - \phi - \mu_t(\psi - \phi) \,|$$

$$\leq |F|_\infty \, \underbrace{\mu_t(\psi - \phi, \psi - \phi)}^{1/2} \leq |F|_\infty \, |\psi - \phi|_\infty$$

varianza di $\psi - \phi$ rispetto a μ_t

$\to$ se X v.a. $\mathbb{E}\,|X - \mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{V}(X)^{1/2}$

dim Teo 1

- Per lemma

$$d_{TV}(\mu_x^{\eta}, \mu_x^{\eta'}) \le \| H_x(\cdot|\eta) - H_x(\cdot|\eta') \|_\infty$$

ora

$$b_{x,y} := \frac{1}{2} \sup_{\substack{\eta,\eta': \\ \eta=\eta' \text{ fuori da } y}} d_{TV}(\mu_x^{\eta}, \mu_x^{\eta'})$$

$$\le \frac{1}{2} \sup_{\omega_x \in \Omega_0} \sup_{\eta_y, \eta'_y \in \Omega_0} \sup_{\eta \in \Omega_{\{x,y\}^c}}$$

$$\cdot \sum_{X \ni x} \left| \phi_X(\omega_x \eta_y \eta_{\{x,y\}^c}) - \phi_X(\omega_x \eta'_y \eta_{\{x,y\}^c}) \right|$$

△ posso aggiungere il vincolo $X \ni y$

$$\le \frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{X \ni \{x,y\}} \|\phi_X\|_\infty = \sum_{X \ni \{x,y\}} \|\phi_X\|_\infty$$

per covarianza per traslazioni di ϕ

$$\sup_x \sum_{y \ne x} b_{x,y} \le \sup_x \sum_{y \ne x} \sum_{X \ni \{x,y\}} \|\phi_X\|_\infty$$

$$= \sum_{X \ni x} (|X| - 1) \|\phi_X\|_\infty = \sum_{X \ni 0} (|X|-1) \|\phi_X\|_\infty$$

$\square$

Per la dimostrazione di teo 2, l'invarianza per traslazioni non serve. Semplifico (?) le notazioni

$$x \in \mathbb{Z}^d \rightsquigarrow i \in \mathbb{N}$$

$$\mu_x^\eta(\cdot) \rightsquigarrow \alpha_i(\eta, \cdot) \in \mathcal{P}(\Omega_0) \quad \text{nucleo di probabilità}$$

e

$$\eta \mapsto \alpha_i(\eta, f) \text{ è continua } \forall f \in \mathcal{E}(\Omega)$$

[già usato in stati di Gibbs di vol. infinito]

~~in realtà~~
penso anche $\alpha_i(\eta, \cdot)$ come prob. su tutto Ω, come al solito in DCR

Sappiamo

$$\mu = \mu\, \alpha_i(\cdot) \qquad \left[\quad \mu(f) = \int \mu(d\eta)\, \alpha_i(\eta, f) \right]$$

l'idea è di ~~iterare~~ iterare i nuclei α_i

$$\mu = \mu\, \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}$$

Fino ad avere ! di μ.

Stesso spirito di principio delle contrazioni (con quello di grandi deviazioni, quello dei punti fissi)

~~Esplicitamente~~

Funzionerà (analogo delle contrazioni) quando

$$\sup_i \sum_j b_{ij} < 1$$

$\Omega = \Omega_0^{\mathbb{N}}$ se $f \in \mathcal{E}(\Omega)$

$$\mathrm{osc}_j(f) := \sup_{\substack{\omega, \eta : \\ \eta = \omega \text{ fuori da } j}} |f(\omega) - f(\eta)|$$

$$D(f) := \sum_j \mathrm{osc}_j(f)$$

$D(f)$ è una seminorma

$D(f) \geq 0$

$= 0$ sse f costante

f locale $\Rightarrow$ $D(f) < +\infty$

basterà controllare su funzioni con $D(f) < +\infty$.

[Se preferite $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\mathrm{osc}_j(f) = |\partial_j f|_\infty$]

<u>Lemma 1</u> se $f \in \mathcal{E}(\Omega)$

$$\mathrm{osc}(f) := \sup(f) - \inf(f) \leq D(f)$$

<u>dim</u> per densità basta f locale.

Mi organizzo una somma telescopica cambiando una coordinata alla volta

$$f(\omega) - f(\eta) = f(\omega_1 \ldots \omega_n) - f(\eta_1 \ldots \eta_n)$$

$$= f(\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n) - f(\eta_1 \omega_2 \ldots \omega_n) + f(\eta_1 \omega_2 \ldots \omega_n) - f(\eta_1 \ldots \eta_n)$$

$$= \ldots = \sum_{j=1}^{n} [f_j(\omega_j) - f_j(\omega_{j-1})]$$

$\to$ differiscono solo in un sito

$$\mathrm{osc}(f) \leq \sum_j \mathrm{osc}_j(f)$$

$\square$

<u>Lemma 2</u> $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$|\mu(f) - \nu(f)| \le \frac{1}{2} \underbrace{osc(f)}_{=\ \sup f - \inf f} d_{TV}(\mu, \nu)$$

<u>dim</u> ~~step~~ sia $g = f - \dfrac{\sup f + \inf f}{2}$

$$\sup g = \frac{\sup f - \inf f}{2} \qquad \inf g = \frac{\inf f - \sup f}{2} \qquad |g|_\infty = \frac{1}{2} osc(f)$$

$$|\mu(f) - \nu(f)| = |\mu(g) - \nu(g)| \le |g|_\infty \, d_{TV}(\mu, \nu)$$

□

~~Lemma 3~~

~~$i, j \in \Lambda$ $\quad osc_{i}(\alpha_x(f)) \le \begin{cases} 0 & x = y \\ osc_x(f)\, b_{x,y} + osc_y(f) & x \neq y \end{cases}$~~

~~dim $\alpha_x(f) =$~~

<u>Lemma 3</u> se $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$i, j \in \Lambda \quad osc_j(\alpha_i(f)) = \begin{cases} 0 & i = j \\ osc_i(f)\, b_{ij} + osc_j(f) & i \neq j \end{cases}$

<u>dim</u>

~~$\alpha_i(f)$~~ per costruzione $\alpha_j(\eta, f)$ non dipende da η_j

$\Rightarrow osc_j(\cdot) = 0$

$i \neq j$

$$\alpha_i(\eta, f) - \alpha_i(\eta', f) = \int_{\Omega_0} \alpha_i(\eta, d\omega)\, f(\omega_i \eta_{\{i\}^c})$$

aggiungo e sottraggo

$$- \int_{\Omega_0} \alpha_i(\eta', d\omega)\, f(\omega_i \eta'_{\{i\}^c})$$

$$\pm \int_{\Omega_0} \alpha_i(\eta, d\omega)\, f(\omega_i \eta'_{\{i\}^c})$$

$$\alpha_i(\eta, F) - \alpha_i(\eta', F) = \int \alpha_i(\eta, d\omega)\,[F(\omega_i \eta_{i^c}) - F(\omega_i \eta'_{i^c})]$$

$$+ \underbrace{\int \alpha_i(\eta, d\omega)\, F(\omega_i \eta'_{i^c}) - \int \alpha_i(\eta', d\omega)\, F(\omega_i, \eta'_{i^c})}$$

(lemma 2)

$$\leq \frac{1}{2} \underbrace{\left[\sup_\omega F(\omega\, \eta') - \inf_\omega F(\omega, \eta')\right]}_{\leq \operatorname{osc}_i(F)} d_{TV}(\alpha_i(\eta), \alpha_i(\eta'))$$

se $\eta = \eta'$ fuori da i

~~ricavo~~ ricavo:

$$\operatorname{osc}_j(\alpha_i(F)) \leq \operatorname{osc}_j(F) + \operatorname{osc}_i(F)\, \delta_{ij}$$

$\square$

~~Definisco A operatore lineare su $\mathcal{C}(\Omega)$ come~~

~~$AF = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n \circ \dots \circ \alpha_1) F$ (limite in norma sup)~~

~~infatti:~~

~~• F locale~~ $F = F(\omega_1 \dots \omega_e)$

~~$(\alpha_1 F) = F(\omega_2 \dots \omega_e)$ ...~~

~~$A(F) = ...$ il limite è raggiunto al finito~~

~~$\alpha_1 F$ è funz. ($\omega_2, \dots$~~

Definisco $A : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega)$ lineare come

$$AF = \lim_n (\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n)(F)$$

limite $\exists$ in norma sup

infatti

- F locale $\quad F = F(\omega_1, \dots, \omega_e)$

se $i > e \quad \alpha_i F = F$

$$AF = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_e\, F$$

- $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ per densità. Basta che $\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n f$ siano equicontinui per f locale

in effetti se f e g sono locali

$$|Af - Ag|_\infty = |\alpha_1 \circ \dots \alpha_n f - \alpha_1 \circ \dots \alpha_n g|_\infty$$ (per un certo $n = n(f,g)$)

$$\leq |f - g|_\infty$$

sono nuclei di prob.

<u>Lemma 4</u> (Stima cruciale)

Se $b_* \leq 1$ $\quad D(Af) \leq b_* D(f) \quad f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ "quasi locale"

[comincia a vedersi una contrazione]

<u>dim</u>

- Passo 1.

$$D(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \alpha_n f) \leq b_* \sum_{j=1}^{n} osc_j(f) + \sum_{j=n+1}^{\infty} osc_j(f)$$

induzione in n

$\alpha_1 f$ non dipende da w_1

$n = 1$

$$D(\alpha_1 f) = \sum_{j=2}^{\infty} osc_j(\alpha_1 f)$$

Lemma 3

$$\leq \sum_{j=2}^{\infty} [osc_1(f)\, b_{1j} + osc_j(f)]$$

$$\leq b_* \, osc_1(f) + \sum_{j=2}^{\infty} osc_j(f)$$

Passo induttivo

$$D(\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n F) \leq D((\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_{n-1})(\alpha_n F))$$

Ipotesi induttiva

$$\leq b_* \sum_{j=1}^{n-1} osc_j(\alpha_n F) + \sum_{j=n}^{\infty} osc_j(\boxed{\alpha_n F})$$

non dipende da ω_n

(Lemma 3)

$$\leq b_* \sum_{j=1}^{n-1} [b_{n,j} \, osc_n(F) + osc_j(F)]$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{\infty} [b_{n,j} \, osc_n(F) + osc_j(F)]$$

($b_* \leq 1$)

$$\leq b_* \sum_{j=1}^{n-1} osc_j(F) + \sum_{j=1}^{\infty} osc_n(F) \, b_{n,j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} osc_j(F)$$

$$\leq b_* \sum_{j=1}^{n} osc_j(F) + \sum_{j=n+1}^{\infty} osc_j(F)$$

- Passo 2

~~Fed.~~ Fatou

$$D(AF) = \sum_{j=1}^{\infty} osc_j(AF) = \sum_j \lim_n osc_j(\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n F)$$

(Fatou)

$$\leq \varliminf_n \sum_j osc_j(\alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n F)$$

(Passo 1)

$$\leq \varliminf_n \Big[b_* \sum_{j=1}^{n} osc_j(F) + \underbrace{\sum_{j=n+1}^{\infty} osc_j(F)}_{\to 0 \ n \to \infty} \Big]$$

<u>Lemma 5</u> Sia $b_* < 1$, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ $D(f) < +\infty$

$A^n f \to$ costante (norma sup)

<u>dim</u>

$\sup A^n f \searrow$ $\inf A^n f \nearrow$

infatti

$\sup Af \leq \sup f$ poiché

$\sup_\eta \alpha_i(\eta, f) \leq \sup f$

$$\sup(A^n f) - \inf(A^n f) \overset{\text{(Lemma 2)}}{\leq} D(A^n f)$$

$$\overset{\text{(Lemma 4)}}{\leq} b_* D(A^{n-1} f) \leq b_*^n D(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e quindi $A^n f \to$ costante in norma sup □

<u>dim</u> <u>Teo 2</u>

devo dimostrare ! delle $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ t.c. $\mu \alpha_i = \mu$

Fisso f qualsiasi ($f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $D(f) < +\infty$)

$\mu(f) = \mu(\alpha_i f)$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\mu(Af) = \mu(f)$

$\Rightarrow$ $\mu(A^n f) = \mu(f) \to$ costante indip da μ

se ho μ_1 e μ_2

ricavo

$\mu_1(f) = \mu_2(f)$ $\forall f$ t.c. $D(f) < +\infty$

□