OSS 4 Nella dimostrazione abbiamo usato la teoria delle grandi deviazioni solo per ricavare la legge dei grandi numeri per M_n quando $\sigma \sim \mu_n$ = Curie Weiss. Questo quando è vera $h \neq 0$ o $h = 0$ e $\beta J \leq 1$. Se invece $h = 0$ e $\beta J > 0$

$$m_n(\beta, 0) = \mu_n(M_n) = 0 \quad \text{per simmetria}$$

ma, non potrà essere vero $M_n \xrightarrow{\mu_n} 0$

Cosa succede effettivamente a Legge(M_n) ?

⊙ Punto di vista del grande deviazionista ~~ultraortodosso~~ ultraortodosso sulla legge dei grandi numeri.

- Stime di grandi deviazioni (in particolare la stima dall'alto)
  Se fatte al livello "giusto" e sono vere in condizioni molto generali e non richiedono un'analisi particolarmente dettagliata

- Legge (debole) dei grandi numeri.
  Richiede due ingredienti:
  (a) * Stima dall'alto di grandi deviazioni (vedi sopra)
  (b) * Il funzionale del tasso ha un ! zero

(b) ~~a~~ richiede invece un'analisi dettagliata e non è vera in condizioni generali

μ_n Curie-Weiss. È molto più facile trovare il principio di grandi deviazioni per μ_n che la sua legge dei grandi numeri, che in effetti fallisce in transizione di fase

Stessa situazione per campi di Gibbs:

- Principio di grandi deviazioni: sempre vero
- legge dei grandi numeri per "osservabili termodinamici", solo sulle probabilità estremali (stati puri)

se $\mu^{\eta}_{\Lambda_n}$ stato di volume finito con bordo η dipende se le condizioni al bordo sono organizzate in modo che $\mu^{\eta}_{\Lambda_n} \to$ stato estremale o no.

Rottura spontanea di simmetria

[terminologia di fisica]

La transizione di fase ferromagnetica è legata a questo effetto.

Modello tipo Ising con $h=0$

L'interazione è invariante per la simmetria $\sigma \to -\sigma$

[azione del gruppo $\mathbb{Z}_2$]

Evidentemente

$$\arg\inf \{ H(\sigma) = -\sum_{xy} J_{xy}\sigma_x\sigma_y \}$$

$$= \{-1, +1\}$$

è invariante per questa azione. Ha il minimo e degenere

Cosa succede a $T > 0$ $(\beta < +\infty)$??

- Se β è piccolo [alta temperatura]

  $\exists!$ fase ~~...~~ senza magnetizzazione spontanea, invariante rispetto all'azione del gruppo di simmetria

- se $\beta > \beta_c$ c'è transizione di fase

Se considero $\mathcal{G}(\Phi) = \{$ stati di Gibbs di volume infinito $\}$

questo è evidentemente invariante rispetto all'azione del gruppo di simmetria [come $\arg\inf\{H\}$]

Le fasi pure (nel senso della termodinamica) sono però descritte da

$$\mathcal{G}(\Phi)_e = \{\text{stati puri}\}$$

e se prendo $\mu \in \mathcal{G}(\Phi)_e$ lei non è invariante per l'azione del gruppo di simmetria [c'è infatti magnetizzazione spontanea]

$\ldots \rightsquigarrow$ Rottura spontanea di simmetria

- Se prendete un pezzo di ferro, il vostro pronostico era

$$\mu = \frac{1}{2}\mu^+ + \frac{1}{2}\mu^-$$

$\leftarrow$ stato magnetizzazione < 0

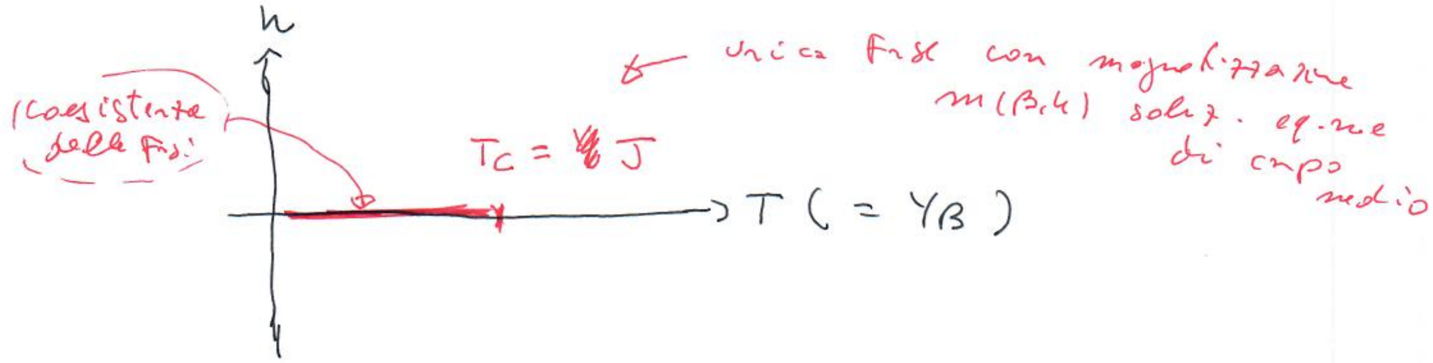
$\nwarrow$ stato magnetizzazione > 0

Ma una volta che avete misurato m sapete che stato puro avete preso

~~stati puri~~ $\rightsquigarrow$ fasi pure del sistema

Le misure di stati puri corrispondono alla nostra ignoranza sulla fase del sistema, quando facciamo una misura scopriamo quale fase abbiamo preso.

Curie-Weiss: diagramma di fase e legge della magnetizzazione



TEO Sia $\sigma \in \{-1,1\}^n$ scelto con μ_n Curie-Weiss

$$M_n(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} \sigma_x = \text{magnetizzazione empirica}$$

(a) se $h \neq 0$ o $h = 0$ e $\beta J \leq 1$

(in probabilità rispetto a μ_n)

$$M_n \xrightarrow{\mu_n} m(\beta,h) = ! \text{ soluz. eq.ne di campo medio}$$

(b) se $h = 0$ e $\beta J > 1$

$$\text{legge}(M_n) \to \frac{1}{2}\delta_{m(\beta,0^+)} + \frac{1}{2}\delta_{m(\beta,0^-)}$$

soluzioni stabili eq.ne di campo medio

oss

$m_n(\beta,0) = \mu_n(M_n) = 0$ ma è instabile

basta cambiare di poco μ_n e M_n sceglie una delle due fasi stabili dim

(a) principio di grandi deviazioni + ! minimo I_{CW} $\Rightarrow$ legge dei grandi numeri

~~Infatti~~ ecco i dettagli

solu.ni eq.ne campo medio

Dato $\delta > 0$ $\quad C_\delta = \{ m \in \mathbb{R} : | m - m(\beta, h) | \geq \delta \}$

da LDP [solo stima dall'alto]

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{n} \log \mu_n (M_n \in C_\delta) \leq - \inf_{C_\delta} I_{CW}$$

Per ! del minimo $\quad \inf_{C_\delta} I_{CW} = \varepsilon = \varepsilon_\delta > 0$

quindi $\forall y > 0 \quad \exists n_0 = n_0(y)$ t.c. $n \geq n_0$

$$\mu_n (M_n \in C_\delta) \leq e^{-n [\varepsilon_\delta - y]}$$

$$\Rightarrow \quad M_n \xrightarrow{\mu_n} m(\beta, h)$$

(b) • principio di grandi deviazioni $\Rightarrow$ punti di accumulazione di Legge (M_n) supportati da $\{ m : I_{CW}(m) = 0 \}$

• se $h = 0$ e $\beta J > 1$

$$I_{CW}(m) = 0 \iff m = m(\beta, 0^\pm)$$

esercizio di calcolo

• la distribuzione di M_n è simmetrica [azione del gruppo di simmetria $\sigma \to -\sigma$]

⑥ Curie Weiss : stati di volume infinito ?

μ_n è una probabilità su $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$
cosa succede se $n \to \infty$?

<u>Non</u> verrà nulla di interessante paghiamo il fatto che è un modello in campo medio

Riguardo μ_n come una successione di probabilità su $\Omega = \{0, 1\}^{|X|}$ con la convergenza debole
[come al solito]

<u>Teo</u>

(a) $h \neq 0$ o $h = 0$ e $\beta J \leq 1$

$\mu_n \to \nu_{m(\beta,h)}$ = Probabilità prodotto su Ω con 1-marginale tale che

$$\underline{\nu_{m(\beta,h)}(\sigma_x)} = m(\beta,h)$$

valore di attesa,

$\nu_{m(\beta,h)}(\sigma_x = +) - \nu_{m(\beta,h)}(\sigma_x = -)$,

(b) $h = 0$ e $\beta J > 1$

$$\mu_n \to \frac{1}{2}\nu_{m(\beta,0^+)} + \frac{1}{2}\nu_{m(\beta,0^-)}$$

dim

compattezza è gratis, devo identificare i punti limite

Basta $\mu_n(f)$ per f locale

Per formula delle probabilità totali

$$\mu_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \mu_n\left(M_n = \frac{k}{n}\right) \mu_n\left(f \,\middle|\, M_n = \frac{k}{n}\right)$$

Il teorema di prima individua la legge limite di M_n

Basta considerare k t.c. $\frac{k}{n} \approx m(\beta, h)$

[$h = 0^{\pm}$ se $h = 0$ e $\beta J > 1$]

$\mu_n\left(\cdot \,\middle|\, M_n = \frac{k}{n}\right)$ è la probabilità uniforme

su $\Omega_{n,k} = \{ \sigma \in \Omega_n : M_n(\sigma) = \frac{k}{n} \}$

Se $k, n \to \infty$ e $\frac{k}{n} \to m \in (-1, 1)$

$$\mu_n\left(\cdot \,\middle|\, M_n = \frac{k}{n}\right) \longrightarrow \nu_m$$

σ_x diventano iid nel limite

Esercizio di probabilità 1

Basta

$$\mu_n\left(\sigma_{x_1} = 1, \cdot, \sigma_{x_k} = 1 \,\middle|\, M_n = \frac{k}{n} \right)$$

- Ulteriori sviluppi modelli di campo medio (<u>non</u> dettagliati)

- Caso critico $h = 0$ $\beta J = 1$: è interessante
  ~~Ursomo~~ $M_n \to 0$ (come dimostrato prima)
  ma le fluttuazioni sono anomale
  [fluttuazioni critiche ...]

  Si può dimostrare il risultato seguente

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{x=1}^{n} \sigma_x \xrightarrow{d} Z \quad \text{v.a. a valori } \mathbb{R}$$

con $\alpha > \frac{1}{2}$ opportuno
[fluttuazioni più grandi che nel paradigma Gaussiano]

con

$$\mathbb{P}(Z \in dz) \propto e^{-\lambda z^4} dz$$

- Limite di campo medio di modelli a portata finita (potenziali di Kac)

  considera Ising su $\mathbb{Z}^d$ con $J_{x,y} = J_\gamma(y-x)$

  e J_γ diventa campo medio nel limite $\gamma \to 0$

  tipo $J_\gamma(z) = \gamma^{-d} J(\gamma z)$

  con J ... con supporto compatto

<u>Ora</u> :
- prima limite termodinamico (trovo pressione (γ) con γ fissato)
- limite di campo medio $\gamma \to 0$

Ritrovo Curie-Weiss, ma <u>non</u> violo la stabilità termodinamica.

Ad esempio

$h=0 \quad \beta J>1$

6) ASSENZA DI TRANSIZIONI DI FASE AD ALTA TEMPERATURA: CRITERIO DI DOBRUSHIN

Dobrushin cita l'incipit di Anna Karenina
"Tutte le famiglie felici sono felici allo stesso modo, ogni famiglia infelice è infelice a modo suo.."

Le misure di Gibbs ad alta temperatura, equivalentemente con interazione Φ piccola in norma $\| \; \|_1$, sono come le famiglie felici, non sono probabilità prodotto, ma non tanto diverse:

- le correlazioni decadono esponenzialmente con la distanza

(covarianza) $\mu(f_x, f_y) \approx e^{-m|x-y|}$

$$\boxed{f_x \longleftrightarrow f_y}$$

- la pressione è analitica
- vale teorema limite centrale

⋮

$\to$ unico stato di volume infinito [forse solo questo] le misure di Gibbs a bassa temperatura, e nello specifico in transizione di fase, sono come le famiglie infelici: ~~ognuna~~ ciascuna ha le sue peculiarità.

Contesto generale

$\Omega = \Omega_0^{\mathbb{Z}^d}$ $\qquad \Omega_0 = \{-1, 1\}$ o $\Omega_0 = \{0, 1\}$

(Lo ~~metto~~

$\Phi = \{ \phi_X \quad X \subset\subset \mathbb{Z}^d \}$ interazione covariante per traslazioni

(β riassorbito in Φ) nello spazio di Banach piccolo

TEO 1 (criterio di Dobrushin)

$$\sum_{X \ni 0} (|X| - 1) \, |\phi_X|_\infty < 1 \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{G}(\Phi)| = 1$$

! stato di Gibbs di volume infinito

OSS: giustamente il potenziale ad un corpo non conta: è l'interazione che deve essere piccola

Troverò questo risultato come corollario di: un teorema più generale che non dipende dall'invarianza per traslazioni

Sia

$$\mu_x^\eta(\cdot) = \mu(\omega_x = \cdot \mid \omega_{\{x\}^c} = \eta) \qquad ? \quad \cdot x$$

è una probabilità su Ω_0

per la formula gibbsiana

$$\mu_x^\eta(\omega_x) = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-H_{\{x\}}(\omega|\eta)}}{Z^\eta_{\{x\}}}$$

$$H_{\{x\}}(\omega|\eta) = \sum_{X \ni x} \phi_X(\omega_x \eta)$$

- distanza in variazione totale

μ, ν probabilità su S

$$d_{TV}(\mu,\nu) = 2 \sup_{B \subset S} |\mu(B) - \nu(B)|$$

misurabili

(esercizio)

$$= \sup_{\|f\|_\infty \le 1} |\mu(f) - \nu(f)|$$

continue

Quanto sono vicine (in variazione totale) μ_x^η e $\mu_x^{\eta'}$ se η e η' differiscono solo in y ?

$$b_{x,y} := \frac{1}{2} \sup_{\substack{\eta,\eta' : \\ \eta = \eta' \text{ fuori di } y}} d_{TV}(\mu_x^\eta, \mu_x^{\eta'})$$

<u>OSS</u> $b_{x,x} = 0$ (conta solo η fuori da x)

se Φ di portata R $b_{x,y} = 0$ se $|y-x| > R$

Teo 2 (Criterio di Dobrushin generale)

Se

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{y} b_{x,y} < 1$$

Allora esiste al più una $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ t.c.

$$\int \mu(d\eta)\, \mu_x^\eta(\cdot) = \mu \qquad \forall x \in \mathbb{Z}^d$$

sono [DLR per i singoletti $\mu\, \mu_x^\cdot = \mu$]

Vediamo quando funziona per il modello di Ising

$$\phi_{\{x,y\}}(\sigma) = -J(y-x)\, \sigma_x \sigma_y$$

$$\sum_{X \ni 0} (|X|-1)\, |\phi_X|_\infty = \sum_{\substack{z \neq 0 \\ z \in \mathbb{Z}^d}} |J(z)| < 1$$

in particolare nel caso di primi vicini

$$2d\, J < 1$$