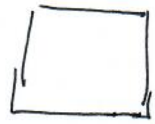
⊙ GRANDI DEVIAZIONI PER CAMPI DI GIBBS

domande come nel caso iid, ma ω_x tirati con una misura di Gibbs
[ω = campo di Gibbs]

Λ_n = cubo di lato n $\subset \mathbb{Z}^d$



Λ_n

μ_{Λ_n} misura di Gibbs su Λ_n

varie possibilità tipo

- stato in Λ_n con bordo fissato η
- stato in Λ_n con bordo vuoto o periodico
- marginale su Ω_{Λ_n} di uno stato di volume infinito

Per quello che faremo la risposta sarà la stessa in tutti questi casi

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ locale

tipo $f(\omega) = \omega_0$

traslazione

$$S_n^f(\omega) = \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{x \in \Lambda_n} (\vartheta_x f)(\omega)$$

"osservabile termodinamico" se $f = \omega_0$ è la densità (empirica) in Λ_n

$$= \frac{\#\ \text{particelle in } \Lambda_n}{|\Lambda_n|}$$

Vogliamo ricavare asintotica di grandi deviazioni per S_n^F, tipo

$$\mu_{\Lambda_n}\left(S_n^F \approx x \right) \sim e^{-|\Lambda_n| I^F(x)}$$

Questa è la stessa domanda che nel Teorema di Cramer, ma non sono più variabili aleatorie i.i.d.

Ricetta di Gartner - Ellis Φ interazione

$$\Lambda(\lambda) = \lim_n \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \mu_{\Lambda_n}\left(e^{\lambda |\Lambda_n| S_n^F} \right)$$

ora

$$\mu_{\Lambda_n}(\omega) = \frac{1}{Z_n(\Phi)} e^{-H^{\Phi}_{\Lambda_n}(\omega)}$$

diciamo condizioni al bordo vuote

$$\mu_{\Lambda_n}\left(e^{\lambda |\Lambda_n| S_n^F}\right) = \frac{1}{Z_n(\Phi)} \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda_n}} e^{\underbrace{\sum_{x\in\Lambda_n} \lambda \theta_x F}_{\text{lo posso riassorbire in } \Phi} - H^{\Phi}(\omega)}$$

$$= \frac{Z_n(\Phi^{\lambda,F})}{Z_n(\Phi)} \qquad \text{dove} \quad \Phi^{\lambda,F} = \Phi - \lambda F$$

c'è solo un tipo di corpi che individuo ~~come~~ da F

$\exists$ limite termodinamico per la pressione
[non dipende dalle condizioni al bordo]

$$\Rightarrow \quad \Lambda(\lambda) = p(\Phi^{\lambda,F}) - p(\Phi)$$

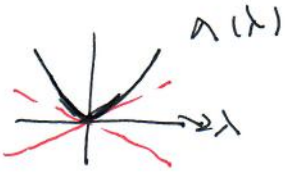
$$I^F(x) = \Lambda^*(x) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \{ \lambda x - \Lambda(\lambda) \}$$

Sembra tutto come nel caso i.i.d. (c.f. teorema di Cramer).

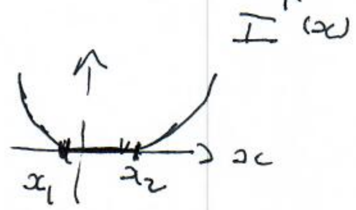
Eppure:

in transizione di fase $|\partial\rho|>1$

la situazione è tipo così



e quindi (un esercizio proposto in passato)



se $x \in [x_1, x_2]$

$$\mu_{\Lambda_n}(S_n^F \simeq x) \sim e^{-|\Lambda_n|\cdot 0}$$

ogni x siffatto ha pos. ~~subexpon~~ subesponenziale di capitare

È coerente con quanto già sappiamo

$\lim_n S_n^F$ è certo (vale la legge dei grandi numeri)

solo se ω è tirato con μ che è stato di Gibbs <u>estremale</u>

[o con σ-algebra coda banale o invariante per traslazioni e ergodico]

Questo principio di grandi deviazioni non è ~~abbastanza~~ abbastanza fine per cogliere le differenze tra i diversi stati di Gibbs:

a livello esponenziale (nel volume) sono tutti uguali

- In transizione di fase è possibile ottenere risultati più fini [grandi deviazioni al second'ordine] che dicono cose tipo questo

$$\mathbb{P}_{\Lambda_n}(S_n^F \approx x) \sim \exp\{ -|\Lambda_n| \cdot 0 - |\partial\Lambda_n| \underbrace{\quad}_{\sigma} \}$$

modelli particolari e le condizioni al bordo contano.

qualcosa > 0 salvo che per $x = \bar{x}$

qualcosa è legato alla tensione superficiale e problemi isoperimetrici

... non in questo corso

- L'asintotica di grandi deviazioni ricavata usando la ricetta di Gartner-Ellis è giusta, ma ~~la dimostrazione non~~ la dimostrazione è bacata in transizione di fase $\Lambda(\lambda)$ non ha la regolarità necessaria per usare il teorema astratto di Gartner-Ellis

- Strategia ~~che invece~~ esente da bachi:

Dimostriamo il principio di grandi deviazioni per campi di Gibbs di (?) per un osservabile molto più ricco [processo empirico] e poi ricaviamo quello per S_n^F per proiezione [via principio delle contrazioni].

Ci dice bene: al livello del processo empirico il principio di grandi deviazioni per campi di Gibbs è una piccola estensione del caso iid.

Teo (Laplace-Varadhan)

μ_n LDP con tasso $I : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$

$\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ continua e limitata

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \mu_n(e^{n\phi}) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \{ \phi(x) - I(x) \}$$

COR

μ_n LDP con tasso $I : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$

$\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ continua e limitata

μ_n^ϕ prob su $\mathcal{X}$ definita da $d\mu_n^\phi = \dfrac{e^{-n\phi}\, d\mu_n}{\mu_n(e^{-n\phi})}$

costante di normalizzazione in modo che μ_n^ϕ sia una prob.

Allora

μ_n^ϕ LDP con tasso $I^\phi : \mathcal{X} \to [0, \infty]$

$$I^\phi(x) = I(x) + \phi(x) - \inf_{y \in \mathcal{X}} [I(y) + \phi(y)]$$

dim: Esercizio

oss per Laplace-Varadhan $\mu_n(e^{-n\phi}) \sim e^{+n \overbrace{\sup(-I-\phi)}^{= -\inf(I+\phi)}}$

ϕ continua è essenziale, ϕ limitata si può indebolire

Campi di Gibbs

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$

ρ_Λ prob. unif su $\Omega_\Lambda = \{0,1\}^\Lambda$

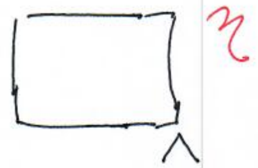
$[\, \rho_\Lambda = \otimes \, \mathrm{Bern}(1/2)^{\otimes \Lambda} \,]$

Φ interazione invariante per traslazioni

$$\Phi = \{ \phi_X ,\ X \subset\subset \mathbb{Z}^d \} \quad \text{con} \quad \phi_X \in \mathcal{F}_X$$

$$\theta_x \phi_X = \phi_{X+x}$$

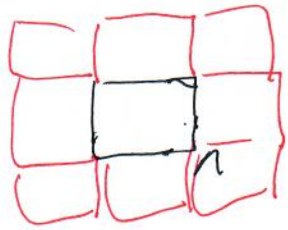
$$H^{\Phi}_{\Lambda}(\omega|\eta) = \sum_{X \cap \Lambda \neq \emptyset} \phi_X(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})$$



$$\mu^{\eta}_{\Lambda}(\omega) = \frac{1}{2^{|\Lambda|}} \frac{e^{-H^{\Phi}_{\Lambda}(\omega|\eta)}}{Z^{\eta}_{\Lambda}(\Phi)}$$

misura di Gibbs (per l'interazione Φ) in Λ con condizioni al bordo η

Λ = cubo $\qquad \omega^{(\Lambda)}$ = configurazione in Λ ripetuta periodicamente $\in \Omega$



- Processo empirico:

$$R_\Lambda(\omega) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \delta_{\theta_x \omega^{(\Lambda)}}$$

$$R_\Lambda : \Omega_\Lambda \to \mathcal{P}_\theta(\Omega)$$

o anche

$R_\Lambda : \Omega \to \mathcal{P}_\theta(\Omega)$ ma R_Λ è $\mathcal{F}_\Lambda$ misurabile

Sia ora $f^{\Phi} : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua (e limitata) se $\Phi \in \mathcal{B}$ ($|||\Phi||| < +\infty$)

$$f^{\Phi} = \sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \phi_X$$

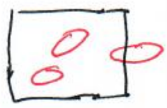
OSS (cruciale)

- se Φ ha portata finita [$\phi_X = 0$ se $\mathrm{diam}(X) > R$]

$$\big\| \, |\Lambda| R_\Lambda(\Phi) - H_\Lambda(\cdot|\eta) \big\|_\infty \le C \, |\partial\Lambda|$$ unif anche in η

$C = C(\Phi)$ $\cancel{c = c(\Phi, R)}$

infatti se $X \subset \Lambda$ viene proprio uguale
X a cavallo li stimo



- se $\Phi \in \mathcal{B}_1$ $\quad \|\Phi\| = \sum_{X \ni 0} |\phi_X|_\infty < +\infty$

è quasi lo stesso

$$\big\| \, |\Lambda| R_\Lambda(\Phi) - H_\Lambda(\cdot|\eta) \big\|_\infty = \underbrace{o(|\Lambda|)}_{\text{infinitesimo di ordine inferiore a } |\Lambda| \text{ per } \Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d}$$ unif in η

[è il resto di una serie convergente]

- Sia μ stato di Gibbs di volume infinito

e $\Pi_\Lambda \mu$ il marginale di μ su Ω_Λ

Via DLR e stima precedente ricavo direttamente (o uno fissato)

bordo vuoto

$$(\Pi_\Lambda \mu)(\omega) = \frac{1}{2^{|\Lambda|}} \, \frac{e^{-|\Lambda| [H^\Phi_\Lambda(\omega) + o(1)]}}{Z_\Lambda(\Phi)}$$

infinitesimo per $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$

Le correzioni sono subesponenziali e quindi irrilevanti per le grandi deviazioni

Siamo in affari per usare il corollario di Laplace-Varadhan. In effetti è questo il motivo per cui siamo arrivati al livello del processo empirico:

Lo stato di Gibbs in Λ (nelle sue varie interpretazioni) è perturbazioni continue (a livello di processo empirico) della misura prodotto

$$\mu_\Lambda = \underbrace{\rho_\Lambda}_{\text{prodotto}} \frac{e^{-|\Lambda| R_\Lambda(f^\Phi)}}{Z_\Lambda^\Phi}$$

[a meno di fattori sub esponenziali in $|\Lambda|$]

OSS Se $\nu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$ (invariante per traslazioni)

$$\nu(f^\Phi) = \nu\Big(\sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \phi_X\Big) = u^\Phi(\nu)$$

[energia per sito di volume infinito]

$$u^\Phi(\nu) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \nu(H_\Lambda^\Phi)$$

$u^\Phi : \mathcal{P}_\theta(\Omega) \to \mathbb{R}$ continua ed affine

appariva nel principio variazionale di Gibbs

⊙ Corollario Laplace-Varadhan e osservazioni precedenti implicano direttamente il principio di grandi deviazioni ~~per~~ del processo empirico per campi di Gibbs.

~~Da~~ Via principio delle contrazioni ricavo il resto

<u>TEO</u> (Principio di grandi deviazioni per campi di Gibbs)

Sia $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ successione di cubi

R_{Λ_n} processo empirico in Λ_n visto come v.a. $\mathcal{F}_{\Lambda_n}$ misurabile a valori in $\mathcal{P}_\theta(\Omega)$

$\{\omega_x, x \in \Lambda_n\}$ distribuiti con uno stato di Gibbs (varie possibilità) in Λ_n rispetto all'interazione $\Phi \in \mathcal{B}_1$

Allora R_{Λ_n} soddisfa principio di grandi deviazioni con funzionale di costo

$$\mathrm{ent}(\cdot \mid \Phi) : \mathcal{P}_\theta(\Omega) \to [0, +\infty] \quad \text{dato da}$$

prodotto di Ber(1/2)

$$\mathrm{ent}(\nu \mid \Phi) := \mathrm{ent}(\nu \mid \varrho) + u^\Phi(\nu) - \inf_{\tilde\nu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)} \{ \mathrm{ent}(\tilde\nu \mid \varrho) + u^\Phi(\nu) \}$$

<u>ovvero</u>:

$\forall\, C$ chiuso $\subset \mathcal{P}_\theta(\Omega)$

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \mu_{\Lambda_n}(R_{\Lambda_n} \in C) \leq - \inf_C \mathrm{ent}(\cdot \mid \Phi)$$

$\forall\, A$ aperto $\subset \mathcal{P}_\theta(\Omega)$

$$\underline{\lim_n} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \mu_{\Lambda_n}(R_{\Lambda_n} \in A) \geq - \inf_A \mathrm{ent}(\cdot \mid \Phi)$$

<u>OSS 1</u> Per principio variazionale di Gibbs

$$\inf_{\tilde\nu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)} \{ \mathrm{ent}(\tilde\nu \mid \varrho) + u^\Phi(\tilde\nu) \} = - P(\Phi)$$

e $\mathrm{ent}(\nu \mid \Phi) = 0$ sse ν è stato di Gibbs di volume infinito [invariante per traslazioni]

OSS 2 Se $|\mathcal{G}(\Phi)| = 1$ (! stato di Gibbs di volume infinito)

Teo implica la legge dei grandi numeri per il R_{Λ_n}

Se $|\mathcal{G}(\Phi)| > 1$ dice che i punti di occumulazione di R_{Λ_n} appartengono a $\mathcal{G}(\Phi)$

La legge dei grandi numeri per R_{Λ_n} (e delle sue posizioni) quando c'è [per $\mu \in \mathcal{G}(\Phi)_e$] è decisa da dettagli non visti a livello di queste grandi deviazioni.

OSS 3 Dalla dimostrazione del principio variazionale di Gibbs segue (un po' di lavoro) che

$$\mathrm{ent}(\nu \mid \Phi) = \lim_{n} \frac{1}{|\Lambda_n|} \mathrm{Ent}(\pi_{\Lambda_n} \nu \mid \pi_{\Lambda_n} \mu)$$

se $\mu \in \mathcal{G}(\Phi)$

N.B. $\mathrm{ent}(\cdot \mid \Phi)$ dipende solo da Φ non da quale $\mu \in \mathcal{G}(\Phi)$ scelgo.