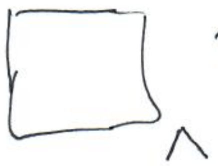
- limite termodinamico con condizioni al bordo



$$H_\Lambda(\omega|\eta) = \sum_{X\cap\Lambda\neq\emptyset} \phi_X(\omega_\Lambda \eta_{\Lambda^c})$$

$$\|\Phi\| = \sum_{X\ni 0} |\phi_X|_\infty$$

$$\mu_\Lambda^\eta(\omega) = \frac{1}{Z_\Lambda^\eta} e^{-H_\Lambda(\omega|\eta)}$$

$$Z_\Lambda^\eta = \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda} e^{-H_\Lambda(\omega|\eta)}$$

$$p_\Lambda^\eta(\Phi) = \frac{1}{|\Lambda|}\log Z_\Lambda^\eta$$

TEO Sia $\Phi \in B_1$ (sp. "piccolo")

$p_\Lambda^\eta(\Phi) \to p(\Phi)$ (= pressione di vol. ∞)

Λ succ. di cubi

unif in η

ovvero: $\forall$ successione $\eta^{(n)} \in \Omega_{\Lambda^c}$

$$\lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^d} p_\Lambda^{\eta_\Lambda^{(n)}}(\Phi) = p(\Phi)$$

$\Uparrow$ ad esempio = limite con condizioni vuote

Ingrediente: Φ portata r

$$|H_\Lambda(\omega) - H_\Lambda(\omega|\eta)| \le |\partial_r^+\Lambda| \, \|\Phi\|_1$$

Altri ensembles

(bordo vuoto)

canonico

$$Z^{CAN}_{\Lambda, N_\Lambda}(\Phi) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega_\Lambda : \\ \sum_{x \in \Lambda} \omega_x = N_\Lambda}} e^{-H_\Lambda(\omega)}$$

se ... $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ $\quad \frac{N_\Lambda}{|\Lambda|} \to \rho$

$$\frac{1}{|\Lambda|} \lg Z^{CAN}_{\Lambda, N_\Lambda}(\Phi) \longrightarrow F(\rho, \Phi)$$

microcanonico

$$Z^{MICRCAN}_{\Lambda, N_\Lambda, E, \Delta}(\Phi) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega_\Lambda \\ \sum_{x \in \Lambda} \omega_x = N_\Lambda \\ E < H_\Lambda(\omega) < E + \Delta}} e^{-H_\Lambda(\omega)}$$

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \lim_{\substack{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d \\ \frac{N_\Lambda}{|\Lambda|} \to \rho \\ \frac{E}{|\Lambda|} \to e}} \frac{1}{|\Lambda|} \lg Z^{microcan}_{\Lambda, N_\Lambda, E, \Delta}(\Phi) = S(\rho, e)$$

Legami tra i potenziali termodinamici dei diversi ensembles

Si può fare, è un po' faticoso non discuto

Prossimo scopo:

- misure di Gibbs di volume infinito
  (∃ limite tendono per gli stati con pressione)

- mentre la pressione è una sola indip. dalle condizioni al bordo, gli stati di vol ∞ possono essere tanti

  corrispondono a transizioni di fase
  (miscela di acqua e vapore)

- corrispondenza biunivoca tra gli stati di vol. ∞ e la "derivata" della pressione

Com'è possibile che la costante di normalizzazione di una prob. porti così tante informazioni?

X v.a. (reale)

Funz. caratteristica $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ $t \in \mathbb{R}$
identifica la legge di X

a parte integrabilità anche la funzione generatrice $\psi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X})$

dichiariamo il potenziale ad un corpo

$\Phi_{\{x\}} = \lambda w_x$ (la costante conta)

$$H_\Lambda(\omega) = \lambda \sum_{x \in \Lambda} w_x + H^{\geq 2}_\Lambda(\omega)$$

guardiamo $N_\Lambda(\omega) = \sum_{x \in \Lambda} \omega_x$

oss termodinamico (estensivo)

funz. generatrice di N_Λ

$$\mu_\Lambda\left(e^{\alpha N_\Lambda}\right) = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \frac{1}{Z_\Lambda(\Phi)} e^{\alpha N_\Lambda(\omega) - H_\Lambda(\omega)}$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \frac{e^{(\alpha-\lambda) N_\Lambda(\omega) - H_\Lambda^{\geq 2}(\omega)}}{Z_\Lambda(\lambda, \Phi^{\geq 2})}$$

$$= \frac{1}{Z_\Lambda(\lambda, \Phi^{\geq 2})} Z_\Lambda(\lambda - \alpha, \Phi^{\geq 2})$$

in particolare

$$\lg \mu_\Lambda\left(e^{\alpha N_\Lambda}\right) = \text{funzione generatrice "cumulanti"}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{|\Lambda|} \lg Z_\Lambda(\lambda - \alpha, \Phi^{\geq 2})} - \underbrace{\frac{1}{|\Lambda|} \lg Z_\Lambda(\lambda, \Phi^{\geq 2})}$$

hanno limite termodinamico

• Vediamo come $\frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda(\lambda)$ sia effettivamente la funz. generatrice dei cumulanti di N_Λ

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{Z_\Lambda(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-\lambda N_\Lambda(\omega) - H_\Lambda^{\geq 2}(\omega)}$$

$$= \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{Z_\Lambda(\lambda)} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} (-N_\Lambda(\omega)) e^{-\lambda N_\Lambda(\omega) - H_\Lambda^{\geq 2}(\omega)}$$

$$= - \left\langle \frac{N_\Lambda}{|\Lambda|} \right\rangle_{\lambda, \phi^{\geq 2}}$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda(\lambda)$$

$$= \frac{1}{|\Lambda|} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{Z_\Lambda(\lambda)} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} (-N_\Lambda(\omega))\, e^{-\lambda N_\Lambda(\omega) - H_\Lambda^{\geq 2}(\omega)} \right)$$

$$= \frac{1}{|\Lambda|} \left(\langle N_\Lambda^2 \rangle_{\lambda, \phi^{\geq 2}} - \frac{1}{Z_\Lambda(\lambda)^2} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} (-N_\Lambda) e^{-\cdots} \frac{d}{d\lambda} Z_\Lambda(\lambda) \right)$$

$$= \frac{1}{|\Lambda|} \left(\langle N_\Lambda^2 \rangle_{\lambda, \phi^{\geq 2}} - \langle N_\Lambda \rangle^2_{\lambda, \phi^{\geq 2}} \right)$$

$$= \frac{1}{|\Lambda|} \mathrm{Var}_{\Lambda, \lambda}(N_\Lambda)$$

MISURE (= STATI) DI GIBBS DI VOL ∞

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ con top. prodotto
e σ-alg di Borel

$\mathcal{P}(\Omega)$ = prob. su Ω con la convergenza debole

$\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad \mu_n \to \mu$
sse $\forall f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$\mu_n(f) \to \mu(f)$

per la compattezza di Ω
f è automaticamente limitata

poiché funzioni locali (o cilindriche)
sono dense in $\mathcal{C}(\Omega)$
è lo stesso:

$\mu_n(f) \to \mu(f) \quad \forall f$ locale

$\mu_n(\text{cilindro}) \to \mu(\text{cilindro}) \quad \forall$ cilindro

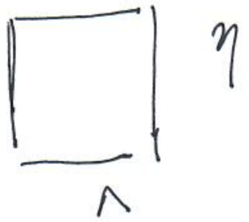
$= \{\omega \in \Omega : \omega_{x_1} = a_{x_1}, \dots, \omega_{x_n} = a_{x_n}\}$

Moralmente (da precisare)

stati di vol ∞ = possibili limiti deboli di μ_Λ^η (stato vol finito con bordo η) quando $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$

Possiamo dare una descrizione più esplicita (e utile)

Eq.ni DLR (Dobrushin Lanford Ruelle)



$$\mu_\Lambda^\eta(\omega) = \frac{1}{Z_\Lambda^\eta} e^{-H_\Lambda(\omega|\eta)}$$

prob su Ω_Λ

La penso come una prob su tutto Ω (stessa notazione) dicendo che $\omega = \eta$ fuori di Λ

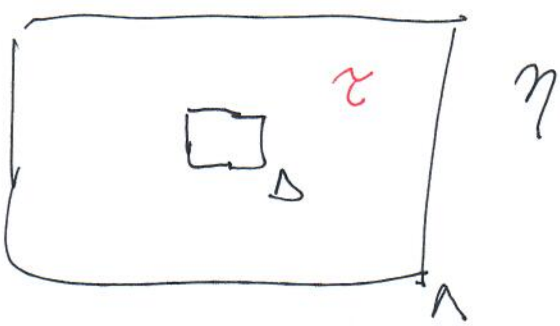
$$\mu_\Lambda^\eta(d\omega) = \mu_\Lambda^\eta(d\omega_\Lambda) \times \delta_\eta(d\omega_{\Lambda^c})$$

$$\Omega = \Omega_\Lambda \times \Omega_{\Lambda^c}$$

$$\omega = (\omega_\Lambda, \omega_{\Lambda^c})$$

Oss Soddisfano una condizione di compatibilità

$$\Delta \subset \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$$



$$\mu_\Lambda^\eta(\cdot \mid \omega_{\Lambda\setminus\Delta} = \tau) = \mu_\Delta^{\tau_{\Lambda\setminus\Delta}\, \eta_{\Lambda^c}}(\cdot)$$

ovvero:

$$f \in \mathcal{F}_\Delta \qquad (f \text{ dip da } \omega \text{ solo per } \omega_x \ x \in \Delta)$$

$$\mu_\Lambda^\eta(f) = \sum_{\tau \in \Omega_{\Lambda\setminus\Delta}} \mu_\Lambda^\eta(\tau) \ \mu_\Delta^{\tau_{\Lambda\setminus\Delta}\eta_{\Lambda^c}}(f)$$

marginale di μ_Λ^η su $\Omega_{\Lambda\setminus\Delta}$

dim: sinistra =

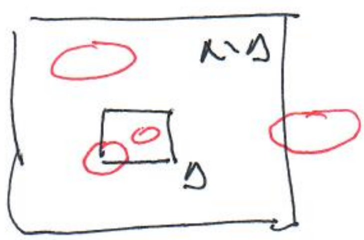
$$= \mu_\Lambda^\eta(f) = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \frac{1}{Z_\Lambda^\eta} e^{-H_\Lambda(\omega|\eta)} f(\omega)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega_\Delta} \sum_{\tau \in \Omega_{\Lambda\setminus\Delta}} f(\omega) \frac{e^{-H_\Lambda(\omega_\Delta \tau_{\Lambda\setminus\Delta}|\eta)}}{Z_\Lambda^\eta}$$

$$\text{destra} = \sum_{\tau \in \Omega_{\Lambda\setminus\Delta}} \Big(\sum_{\sigma \in \Omega_\Delta} \mu_\Lambda^\eta(\sigma\tau) \Big) \mu_\Delta^{\tau\eta}(f)$$

$$= \sum_{\tau \in \Omega_{\Lambda\setminus\Delta}} \sum_{\sigma \in \Omega_\Delta} \sum_{\omega \in \Omega_\Delta} f(\omega) \frac{e^{-H_\Lambda(\sigma\tau|\eta)}}{Z_\Lambda^\eta} \frac{e^{-H_\Delta(\omega|\tau\eta)}}{Z_\Delta^{\tau\eta}}$$

$$H_\Lambda(\sigma\tau|\eta) = \sum_{X\cap\Lambda\neq\emptyset} \phi_X(\sigma\tau\eta)$$



$$= \Big(\sum_{X\subset\Delta} + \sum_{\substack{X\cap\Delta\neq\emptyset \\ X\cap\Lambda\setminus\Delta\neq\emptyset}} + \sum_{\substack{X\cap\Delta=\emptyset \\ X\cap\Lambda\neq\emptyset}} \Big) \phi_X(\sigma\tau\eta)$$

sommo su $\sigma \in \Omega_\Delta$

ϕ_X con

$X \subset \Delta$ e $X \cap \Delta \neq \emptyset$

$X \cap \Lambda \setminus \Delta \neq \emptyset$

producono $Z_\Delta^{\tau\eta}$

ϕ_X con X t.c.

$X \cap \Delta = \emptyset$ non dip da σ

$X \cap \Lambda \neq \emptyset$

li metto insieme a $H_\Delta(\omega | \tau\eta)$

e producono $H_\Lambda(\omega\tau | \eta)$

quindi

$$\text{destra} = \sum_{\tau \in \Omega_{\Lambda \setminus \Delta}} \sum_{\omega \in \Omega_\Delta} f(\omega) \frac{\cancel{Z_\Delta^{\tau\eta}}}{Z_\Lambda^\eta} \frac{e^{-H_\Lambda(\omega\tau|\eta)}}{\cancel{Z_\Delta^{\tau\eta}}}$$

$= \text{sinistra}$

◻

<u>con notazioni compatte</u>

integrato rispetto a fuori

$$\mu_\Lambda^\eta(f) = \mu_\Lambda^\eta(\ \mu_\Delta^{\cdot\,\eta}(f)\ ) \qquad f \in \mathcal{F}_\Delta$$

$$= \int_{\Omega_\Lambda} \mu_\Lambda^\eta(d\omega)\ \mu_\Delta^{\omega_{\Lambda\setminus\Delta}\eta}(f) \qquad \Delta \subset \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$$

poichè μ_Λ^η è la δ in η fuori di Λ

in effetti vale $\forall f \in \mathcal{C}(\Omega)$

Stati di Gibbs di volume ∞

Def $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ è uno stato di Gibbs per l'interazione Φ sse $\forall \Delta \subset\subset \mathbb{Z}^d$ e $\forall f \in \mathcal{E}(\Omega)$

$$\mu(f) = \int \mu(d\eta)\, \underbrace{\mu_\Delta^{\eta_{\Delta^c}}(f)}_{\substack{\text{misura di Gibbs in } \Delta \\ \text{con bordo } \eta}}$$

Eq. ni DLR

Generalmente

μ t.c.

ha μ prob 0 (è vietato)

$$\mu(\cdot \mid \omega = \eta \text{ fuori di } \Delta) = \mu_\Delta^\eta(\cdot)$$

$\omega = \eta$

Δ

Più precisamente

$$\mu(\cdot \mid \mathcal{F}_{\Delta^c})(\eta) = \mu_\Delta^{\eta_{\Delta^c}}(\cdot) \qquad \mu \text{ q.s.}$$

$$\mathcal{G} = \{\mu \in \mathcal{P}(\Omega) : \text{DLR valgono } \forall \Delta \subset\subset \mathbb{Z}^d\}$$

$=$ $\#$ stati di Gibbs di volume ∞ per l'interazione Φ

TGO

- $\mathcal{G}$ non vuoto, compatto e convesso
- $\mathcal{G} = \overline{\text{inviluppo convesso} \left\{ \text{p.ti limite di stati di Gibbs vol. finito} \right\}}$ chiusura debole

— o —

sarà interessante quando $|\mathcal{G}| > 1$