GAS SUL RETICOLO

Motivazione

Misura di Gibbs gran canonica
sp delle fasi a n particelle

$$\propto \frac{z^n}{n!} e^{-\beta H_n(q,p)}$$

$$H_n = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i \neq j} U(q_i - q_j)$$

La dipendenza dagli impulsi è banale
Guardiamo sullo sp. delle configurazioni

$$\propto \frac{z^n}{n!} e^{-\beta \sum_{i\neq j} U(q_i - q_j)}$$

U repulsivo a distanze piccole $\rightsquigarrow$ cuore duro

q vivono su $\mathbb{Z}^d$ invece di $\mathbb{R}^d$

su ogni sito zero o una particella

Per indistinguibilità particelle descrivo la configurazione con le variabili di occupazione

$$\omega_x = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ occupato} \\ 0 & \text{se vuoto} \end{cases}$$

$$\sum_{i\neq j} U(q_i - q_j) \rightsquigarrow \sum_{x \neq y} \omega_x \omega_y J(y-x)$$

$$z^n \rightsquigarrow e^{\lambda \overbrace{\sum_x \omega_x}^{=\ \#\ \text{particelle}}}$$

$z = e^{\lambda}$

Formalismo

Spazio configurazioni

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ configurazioni di ∞ particelle descritte dalle variabili di occupazione

se $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$

$\Omega_\Lambda = \{0,1\}^\Lambda$ configuraz. in Λ

$\omega \in \Omega$ $\qquad \omega = \{\omega_x, x \in \mathbb{Z}^d\}$
$\qquad\qquad \omega_x = 0,1$
$\qquad = $ funzione da $\mathbb{Z}^d$ a $\{0,1\}$

con (lieve) imbroglio notazionale

ω_x è anche la funzione su Ω che restituisce 0, 1 a seconda se x è occupato o no

su Ω topologia prodotto (metrizzabile)

$\mathcal{C}(\Omega)$ = funzioni continue su Ω con norma sup (sp. di Banach) $\qquad \Omega$ compatto

$\|f\|_\infty = \sup_\omega |f(\omega)|$

f locale (o cilindrica) se f dipende da ω solo attraverso un numero finito di ω_x

sono dense in $\mathcal{C}(\Omega)$

Ω è anche spazio misurabile
con σ-alg di Borel $\mathcal{F}$
= σ-alg generata dai cilindri
(eventi che dip. solo da un # finito di ω_x)

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$

$$\mathcal{F}_\Lambda = \sigma\{ \omega_x, x \in \Lambda \}$$

$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}^d} = \mathcal{F})$ sotto σ-alg di $\mathcal{F}$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{F}_\Lambda$ misurabile se f dip da ω solo via $\omega_x, x \in \Lambda$

$\beta = 0$ $(T = \infty)$

misure di Gibbs (gran canoniche) sono misure prodotto su Ω

$\beta > 0$ e $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ c'è la formula di Gibbs

costruiremo mis. di Gibbs anche per $\Lambda = \mathbb{Z}^d$

interazione = Hamiltoniano = Energia (di ω)

<u>Esempio</u>

$$H(\omega) = \underbrace{\sum_x \lambda_x \omega_x}_{1 \text{ corpo}} + \underbrace{\sum_{x,y} J(y,x)\, \omega_x \omega_y}_{2 \text{ corpi}}$$

ben definita solo in volume finito

vogliamo covarianza per traslazioni: $\lambda_x = cost$ $\quad J(y,x) = J(y-x)$

consideriamo però 1 corpo, 2 corpi, ...

non perché ci interessano veramente modelli così generali ma perché sarà vantaggioso nello sviluppo della teoria

Interazione

$$\Phi = \{ \phi_X , X \subset\subset \mathbb{Z}^d \}$$

$$\phi_X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}_X \text{ mis.}$$

(ϕ_X dip. solo da $\omega_x, x \in X$)

Φ covariante (si usa di più invariante) per traslazioni

ϑ_x $x \in \mathbb{Z}^d$ traslazione $\vartheta_x : \Omega \circlearrowleft$

$$(\vartheta_x \omega)_y = \omega_{y-x}$$

$f \in \mathcal{E}(\Omega)$ $\qquad (\vartheta_x f)(\omega) = f(\vartheta_{-x} \omega)$

$$\phi_X(\omega) = \phi_{X+x}(\vartheta_x \omega)$$

ovvero $\phi_{X+x} = \phi_X \circ \vartheta_x$

esempio se $X = \{x, y\}$

ϕ e $\phi_{\{x,y\}}(\omega) = J(x,y)\, \omega_x \omega_y$

la richiesta è

$$\phi_{\{x+z,\, y+z\}}(\theta_z \omega) = J(x+z, y+z)\, \omega_{x+z}\, \omega_{y+z}$$
$$= J(x,y)\, \omega_x \omega_y$$

$\Rightarrow \quad J(x+z, y+z) = J(x,y)$

ovvero $\quad J(x,y) = J(y-x)$

<u>oss</u> se $\phi_{\{x\}}$ è $\mathcal{F}_{\{x\}}$ misurabile

$$\Rightarrow \quad \phi_{\{x\}}(\omega) = \underbrace{\lambda_x \omega_x + \kappa_x}_{\Phi}$$

Funzioni su $\{0,1\}$

se è inv. per traslazioni

λ_x, κ_x non dip da x

$\phi_{\{x\}}$ gioca il ruolo di potenziale chimico

<u>Hamiltoniano</u> di <u>volume</u> <u>finito</u>

$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

$$H_\Lambda(\omega) = \sum_{X \subset \Lambda} \phi_X(\omega)$$

Voglio $H_\Lambda(\omega) \propto |\Lambda|$ (è estensiva)

cosa mi serve su Φ ?

Uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ Φ interazione invariante per traslazioni

$$|||\Phi||| = \sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} |\phi_X|_\infty$$

<u>Lemma</u>

$$|H_\Lambda(\omega)| \leq |\Lambda| \, |||\Phi|||$$

<u>dim</u>

$$|H_\Lambda(\omega)| \leq \sum_{X \subset \Lambda} |\phi_X(\omega)|$$

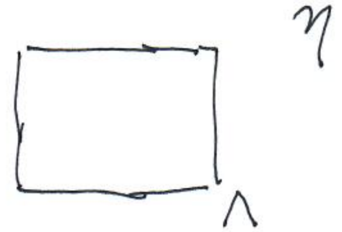
$$= \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\substack{X \ni x \\ X \subset \Lambda}} \frac{1}{|X|} |\phi_X(\omega)|$$

$$\leq \sum_{x \in \Lambda} \underbrace{\sum_{X \ni x} \frac{1}{|X|} |\phi_X|_\infty}_{= |||\Phi||| \text{ per inv. per traslaz.}} = |\Lambda| \, |||\Phi|||$$

<u>oss</u> Φ portata finita $(= r)$
se $\phi_X = 0$ se ~~$X \not\ni 0 \ldots$~~ $\mathrm{diam}(X) > r$

Sono densi in $\mathcal{B}$

Altra situazione



$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

Fissiamo una conf. di particelle η su Λ^c

($\eta \in \Omega_{\Lambda^c}$)

Voglio guardare l'Hamiltoniana in Λ contando anche l'interazione con η (ci sono anche i potenziali a cavallo)

$$H_\Lambda(\omega|\eta) = \sum_{X\cap\Lambda\neq\emptyset} \phi_X(\omega_\Lambda\, \eta_{\Lambda^c})$$

questo è una somma di ∞ termini (in generale)

$\mathcal{B}$ è troppo grande per questo scopo

.. Un altro sp. di Banach $\mathcal{B}_1$

$$\|\Phi\|_1 = \sum_{X\ni 0} |\phi_X|_\infty \qquad \Phi = \{\phi_X,\ X\subset\subset\mathbb{Z}^d\}$$

($\|\Phi\|_1$ stima l'interazione di un sito con il resto del mondo)

<u>Lemma</u> $\Phi\in\mathcal{B}_1$ La serie in $H_\Lambda(\cdot|\eta)$ conv. uniforme

e

$$|H_\Lambda(\omega|\eta)| \le |\Lambda|\, \|\Phi\|_1$$

<u>dim</u>

$$|H_\Lambda(\omega|\eta)| \le \sum_{X\cap\Lambda\neq\emptyset} |\phi_X|_\infty \le \sum_{x\in\Lambda}\sum_{X\ni x} |\phi_X|_\infty = |\Lambda|\, \|\Phi\|_1$$

Misure di Gibbs di vol. finito

$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

ϕ = bordo vuoto

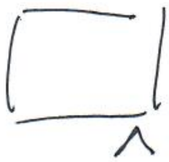
$$\mu_\Lambda^\phi(\omega) = \frac{1}{Z_\Lambda^\phi} e^{-H_\Lambda(\omega)}$$

(β non serve, Φ è arbitrario)

$$Z_\Lambda^\phi = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-H_\Lambda(\omega)}$$

μ_Λ^ϕ prob su Ω_Λ

se invece ho bordo η



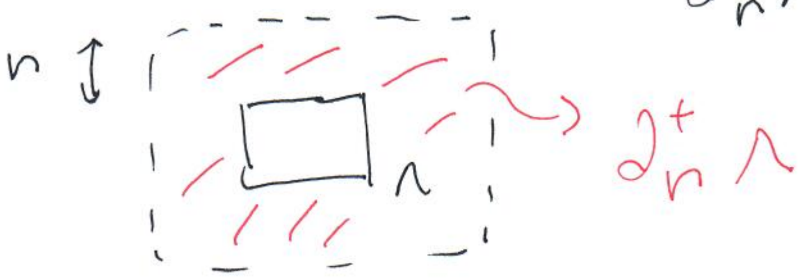
$$\mu_\Lambda^\eta(\omega) = \frac{1}{Z_\Lambda^\eta} e^{-H_\Lambda(\omega|\eta)}$$

$$Z_\Lambda^\eta = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-H_\Lambda(\omega|\eta)}$$

<u>oss</u> $\eta \longmapsto Z_\Lambda^\eta$ è mis. risp. $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$

e se Φ ha portata r finita

rispetto a $\mathcal{F}_{\partial_r^+ \Lambda}$



Limite termodinamico ($\exists$ pressione)

bordo vuoto (condizioni libere)

$$p_\Lambda(\Phi) = \frac{1}{|\Lambda|} \log Z^\phi_\Lambda(\Phi)$$

$$p_\Lambda : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sp di Banach "grande"

TEO ($\exists$ pressione nel limite termodinamico) $\Phi \in \mathcal{B}$

se $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ lungo una successione di cubi

$$\lim_\Lambda p_\Lambda(\Phi) =: p(\Phi) \quad \exists$$

Inoltre:

- $|p(\Phi) - p(\Psi)| \leq |||\Phi - \Psi|||$

(p è 1-Lip in $|||\cdot|||$)

- $p : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$

è convessa

OSS Le condizioni di stabilità termodinamica si enunciano come positività derivate seconde dei potenziali termodinamici

Stiamo dicendo questo, rispetto a infiniti parametri (l'interazione Φ)

Convessità

<u>Lemma</u> $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

$$\mathcal{B} \ni \Phi \longmapsto P_\Lambda(\Phi) \quad \text{è convessa}$$

<u>dim</u>
breve dim

$$P_\Lambda(\alpha \Phi + (1-\alpha)\Psi) \leq \alpha P_\Lambda(\Phi) + (1-\alpha) P_\Lambda(\Psi)$$

$\alpha \in [0,1]$
$\Phi, \Psi \in \mathcal{B}$

$$Z_\Lambda(\alpha\Phi + (1-\alpha)\Psi) = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-[\alpha H_\Lambda^\Phi(\omega) + (1-\alpha) H_\Lambda^\Psi(\omega)]}$$

$$\underset{\text{Holder}}{\leq} \left(\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \cancel{e^{-H_\Lambda^\Phi}} \, e^{-\alpha p H_\Lambda^\Phi} \right)^{1/p} \left(\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-(1-\alpha) q H_\Lambda^\Psi} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$p = \frac{1}{\alpha} \qquad q = \frac{1}{1-\alpha} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$= Z_\Lambda(\Phi)^\alpha \, Z_\Lambda(\Psi)^{1-\alpha}$$

Fai $\frac{1}{|\Lambda|}\log$ e viene ∎

<u>OSS</u>: Dopo che ho fatto $\exists$ limite la convessità di p viene da quella di P_Λ

1 - Lip

<u>Lemma</u> $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

$$|P_\Lambda(\Phi) - P_\Lambda(\Psi)| \le |||\Phi - \Psi|||$$

<u>dim</u>

$$P_\Lambda(\Phi) - P_\Lambda(\Psi) = \int_0^1 dt \, \frac{d}{dt} P_\Lambda(t\Phi + (1-t)\Psi)$$

$$\frac{d}{dt} Z_\Lambda(t\Phi + (1-t)\Psi)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-tH^\Phi - (1-t)H^\Psi}$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} (H^\Psi - H^\Phi)\, e^{-tH^\Phi - (1-t)H^\Psi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_\Lambda(t\Phi + (1-t)\Psi)$$

$$= \frac{1}{|\Lambda|} \frac{1}{Z_\Lambda(t\Phi + (1-t)\Psi)} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} (H^\Psi - H^\Phi)\, e^{-tH^\Phi - (1-t)H^\Psi}$$

poiché $|H^\Phi(\omega)| \le |\Lambda| \, |||\Phi|||$ per linearità

$$|\dots| \le \frac{1}{|\Lambda|} |\Lambda| \, |||\Psi - \Phi||| \cdot 1$$

Dopo che ho fatto $\exists$ limite

1-Lip di P viene da 1-Lip di P_Λ

è ancora meglio!

Questo lemma implica che la famiglia P_Λ (funzioni su $\mathcal{B}$) è equicontinua (il modulo di continuità non dip da Λ)

$\Rightarrow$ Basta fare $\exists$ limite su un denso

Usiamo Φ con portata finita

<u>Lemma</u> se Φ ha portata finita

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} P_\Lambda(\Phi) \quad \exists$$

<u>OSS</u>

$$|H_\Lambda(\omega)| \leq |\Lambda| \, |||\phi||| \qquad Z_\Lambda(\phi) = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-H_\Lambda(\omega)}$$

$$2^{|\Lambda|} e^{-|||\phi|||} \leq Z_\Lambda(\Phi) \leq 2^{|\Lambda|} e^{|\Lambda| \, |||\Phi|||}$$

$$\lg 2 - |||\phi||| \leq P_\Lambda(\phi) \leq |||\phi||| + \lg 2$$

$P_\Lambda : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ è equilimitata, equicontinua

per compattezza (Ascoli-Arzelà)

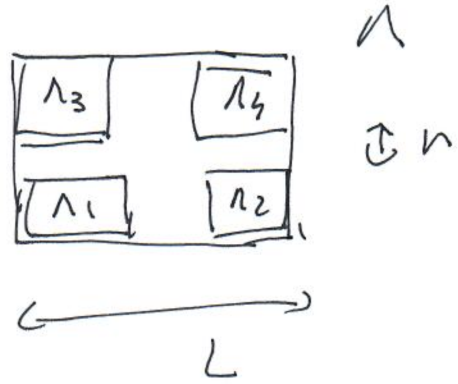
lim per $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ $\exists$ su sottosuccessioni

<u>vogliamo</u> far vedere che $\exists$ veramente

(la pressione è una, non dip da come si fa il limite) dim

$d = 2$ e Λ_n cubo di lato $L_n = 2^n$
per semplicità

Φ portata r



$$Z_\Lambda = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-H_\Lambda(\omega)}$$

$$H_\Lambda(\omega) = H_{\Lambda_1} + \dots + H_{\Lambda_4} + O(L)$$

$$Z_\Lambda \le Z_{\Lambda_1} \cdots Z_{\Lambda_4}\, e^{cL}$$
$$\ge Z_{\Lambda_1} \cdots Z_{\Lambda_4}\, e^{-cL}$$

per invarianza per traslazioni $Z_{\Lambda_1} = \dots = Z_{\Lambda_4}$

Λ_n cubo di lato $2^n = L_n$

$$\left| \frac{1}{|\Lambda_n|} \lg Z_{\Lambda_n} - \underbrace{\frac{4}{|\Lambda_n|}}_{= \frac{1}{|\Lambda_{n-1}|}} \lg Z_{\Lambda_n^1} \right| \le \frac{c L_n}{|\Lambda_n|}$$

$Z_{\Lambda_n^1} \sim Z_{\Lambda_{n-1}}$ per lo stesso argomento

ho trovato

$$|P_{\Lambda_n} - P_{\Lambda_{n-1}}| \le \frac{c}{2^n}$$ che è sommabile

$\Rightarrow \lim \exists$

M