TEORIA DI GRANDI DEVIAZIONI

Motivazione $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

$\omega_x \in \{0,1\}$

$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \omega_x$ ove $(\omega_x)_{x\in\Lambda}$ distribuite con stato di Gibbs (o su Λ o di volume infinito)

= densità media in Λ

se $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ e μ è estremale diventa una v.a. certa

→| Vogliamo fare asintotica più precisa per $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$ |←

Cominciamo con il caso in cui $(\omega_x)_{x\in\Lambda}$ sono i.i.d (solo potenziale ad un corpo, oppure $\beta = 0$, $T = \infty$)

$d = 1$ (inessenziale) $\Lambda = \{1, .., n\}$

è come lanciare n volte una moneta

ω_x i.i.d Bern(p)

$S_n = \sum_{x=1}^{n} \omega_x$ = # Teste

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} p$ legge dei grandi numeri

vogliamo asintotica di

$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \approx \alpha\right) \sim \,?$ $n \to \infty$ $\alpha \in (0,1)$ fisso sappiamo tutto

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, .., n$$

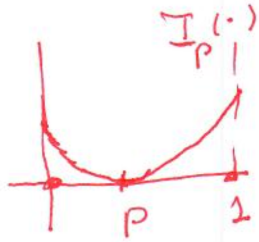
via stirling $\qquad n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \approx \alpha\right) \simeq \binom{n}{n\alpha} p^{n\alpha} (1-p)^{n(1-\alpha)}$$

$$= \frac{n!}{(n\alpha)!\,(n(1-\alpha))!} p^{n\alpha} (1-p)^{n(1-\alpha)}$$

$$\sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad p^{n\alpha} (1-p)^{n(1-\alpha)}}{n^{n\alpha}\, n^{n(1-\alpha)}\, \alpha^{n\alpha}\, (1-\alpha)^{n(1-\alpha)}\, e^{-n\alpha}\, e^{-n(1-\alpha)} \sqrt{(2\pi)^2 \alpha n\, (n(1-\alpha))}}$$

$$\overset{*}{=} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\, n\, \alpha(1-\alpha)}}}_{\text{ignoro}} \exp\Big\{ -n \underbrace{\left[\alpha \lg \frac{\alpha}{p} + (1-\alpha) \lg \frac{1-\alpha}{1-p} \right]}_{\substack{\shortparallel \\ I_p(\alpha)}} \Big\}$$



$$\sim e^{-n I_p(\alpha)}$$

$I_p(\alpha) \geq 0$

$= 0$ sse $\alpha = p$

è (strettamente) convesso

Ex

$$\mathrm{Ent}(\,\mathrm{Bern}(\alpha) \mid \mathrm{Bern}(p)\,) = I_p(\alpha)$$

non è un caso

Si merita ("si è meritata") un'assiomatica

Ω spazio polacco (metrizzabile, separabile e completo)

μ_n successione di prob. su Ω (con σ-alg di Borel)

$\mu_n \to \mu$ sse $\forall F \in C_b(\Omega)$ $\mu_n(F) \to \mu(F)$

o equivalentemente

$\forall C$ chiuso $\overline{\lim_n} \mu_n(C) \le \mu(C)$

$\forall A$ aperto $\underline{\lim_n} \mu_n(A) \ge \mu(A)$

<u>Def</u> Sia $I : \Omega \to [0, +\infty]$ e.s.c.

$\{\mu_n\}$ soddisfa principio di grandi deviazioni (LDP) con tasso (rate function) I sse

(UB) $\forall C$ chiuso $\overline{\lim_n} \frac{1}{n} \lg \mu_n(C) \le - \inf_C I$

(LB) $\forall A$ aperto $\underline{\lim_n} \frac{1}{n} \lg \mu_n(A) \ge - \inf_A I$

Se inoltre I ha insiemi di livello compatti dico che I è buono

(coercivo nel linguaggio del calcolo delle variazioni)

<u>OSS</u> $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ è I-regolare se $\inf_{\mathring{B}} I = \inf_{\overline{B}} I$

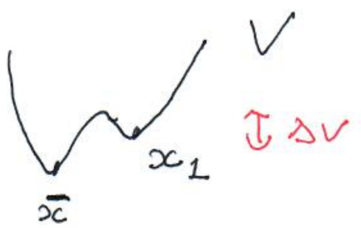
allora μ_n LDP con I implica

$\lim_n \frac{1}{n} \lg \mu_n(B) = - \inf_B I$

"gergalmente" $\mu_n \sim e^{-nI}$"

Preoccuparsi della probabilità di eventi rari (esponenzialmente rari!) sembra contrario allo spirito della probabilità, ma la teoria delle grandi deviazioni ha molte applicazioni e legami con calcolo delle variazioni

esempio Metastabilità



$$\dot{X} = -\nabla V(X) + \sqrt{2\varepsilon}\,\dot{w}$$

rumore bianco

partite da x_1 ("stato metastabile")

quanto tempo ci mettete ad arrivare vicino al $\bar{x}$ ("stato stabile")?

se $\varepsilon = 0$ siete piantati su x_1

$$T_\varepsilon \sim e^{\varepsilon^{-1}\Delta V}$$

teoria di Friedlin-Wentzell

non in questo corso

Fatto generale (non formalizzato)

condizionando gli eventi rari diventano possibili

$\mu_n \to \delta_{\bar{\omega}}$ $\quad$ (B) $\quad$ $\dot{\bar{\omega}}$ $\quad$ $B \not\ni \bar{\omega}$

guarda ora $\nu_n := \mu_n(\cdot \mid B)$ cosa succede $n \to \infty$?

dove finisce ν_n?

Supponi μ_n soddisfa LDP con I

"tra tutti i punti di B" ν_n sceglie il meno improbabile [come misurato da I] "

diciamo

$$\mu_n \sim e^{-nI}$$

supponi

$$\arg\inf_B I = \{\omega_1\}$$

$$\Rightarrow \quad \nu_n \to \delta_{\omega_1}$$

in generale

$$\{\text{punti accumulazione } \nu_n\} \subset \arg\inf_B I$$

se c'è un pareggio vuol dire che il destino di ν_n non è deciso sulla scala esp. e dobbiamo fare asintotiche più raffinate

Slogan:
da I ricavo i possibili limiti dei condizionamento di μ_n risolvendo il problema variazionale $\inf_B I$

— o —

Il calcolo di prima via Stirling implica

X_i iid $\mathrm{Bern}(p)$ $\qquad S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$\sim \mathrm{Bin}(n, p)$

$\frac{S_n}{n}$ soddisfa LDP con tasso

$$I_p(\alpha) = \alpha \lg \frac{\alpha}{p} + (1-\alpha) \lg \frac{1-\alpha}{1-p}$$

$$\alpha \in [0,1]$$

Risultati generali teoria di grandi deviazioni

⊙ Comportamento LDP rispetto ad applicazioni continue

μ_n su Ω LDP I

$\phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ continua

$\tilde{\mu}_n := \mu_n \circ \phi^{-1}$ successione prob su $\tilde{\Omega}$

LDP $\tilde{\mu}_n$?

Lemma (Principio delle contrazioni)

μ_n LDP I $\quad \tilde{\mu}_n = \mu_n \circ \phi^{-1}$ $\quad \phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ continua

$\Rightarrow$ $\tilde{\mu}_n$ LDP $\tilde{I}$ ove

$$\tilde{I}(\tilde{\omega}) = \inf_{\omega \in \phi^{-1}(\{\tilde{\omega}\})} I(\omega)$$

← pre immagini di $\tilde{\omega}$

dim (Esercizio)

⊙ Asintotica di Laplace

in $\mathbb{R}$ $\quad \int g(x)\, e^{-n I(x)}\, dx \underset{n\to\infty}{\sim} \dots$

si possono ottenere tutti gli ordini

Teo (Laplace - Varadhan)

μ_n LDP con I $\qquad$ $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$

continua + condizioni di crescita

(limitata ovvero)

$$\lim_n \frac{1}{n} \lg \mu_n (e^{n \phi}) = \sup \{ \phi - I \}$$

dim non è difficile

$\overline{\lim_n} \; \dots \leq$ $\qquad$ usate UB (stime chiusi)

$\underline{\lim_n} \quad \geq$ $\qquad$ LB (aperti)

— o —

X_i iid $\qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

asintotica di $\frac{S_n}{n}$

Teo (Cramer)

Siano X_i iid. con $\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}) < +\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\mu_n = \text{Legge} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \right)$$

soddisfa LDP con tasso

$$I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{ \lambda x - \lg \mathbb{E}(e^{\lambda X}) \}$$

~~dim~~ in seguito

<u>ricetta</u> [Teo di Gartner-Ellis]

S_n succ. v.a (a valori in $\mathbb{R}$)

vuoi ricavare le DP per $\frac{S_n}{n}$

devi fare così:

$$\Lambda(\lambda) = \lim_n \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(devi dim che lim $\exists$)

allora UB con

$$I(x) = \Lambda^*(x) = \sup_\lambda \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}$$

se inoltre Λ ti è venuto "regolare"

(in un senso preciso di analisi convessa, C^1 avanza)

vale pure LB

Se $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $\quad X_i$ iid

$$\Lambda(\lambda) = \lim_n \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\left(e^{\lambda(X_1+\dots+X_n)}\right)$$

fattorizza per indip.

$$= \log \mathbb{E}\left(e^{\lambda X_1}\right) \quad \text{è } C^1$$

Teorema di Cramer segue

La situazione in meccanica statistica è
molto simile e anche molto diversa

$X_i \rightsquigarrow \omega_x$ variabile di occupazione in x

non sono i.i.d ma correlate

Via un cambio di variabili
(in effetti già discusso)

$$\Lambda(\lambda) = \lim_n \frac{1}{|\Lambda_n|} \log \mu^{*}\left(e^{\lambda \sum_{x \in \Lambda_n} \omega_x} \right)$$

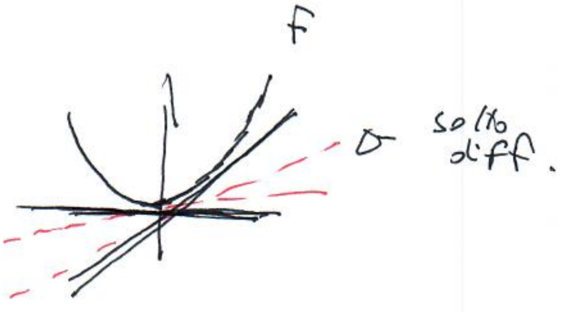
lim $\exists$ ed è equiv. la pressione

solo che – in transizione di fase –
non è regolare e la
ricetta di Gartner Ellis non si può
usare (per il LB)

Eppure: produce il risultato giusto anche
in transizione di fase!
Ma I è diventato peculiare

Esercizio: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + x & x \geq 0 \end{cases}$$



$$f^{*}(\lambda) = \sup_x \{ \lambda x - f(x) \} = ?$$