PRINCIPIO VARIAZIONALE DI GIBBS

Stati di Gibbs di vol ∞ come soluzione di un problema variazionale

$$\mathcal{G}(\Phi) \longleftrightarrow \partial P(\Phi)$$

⊗ Entropia (relativa) tra probabilità

Ω sp. polacco (metrizzabile, separabile e completo)

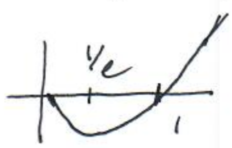
$\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ [come al solito con topologia indotta dalla conv. debole]

$$\mathrm{Ent}(\mu|\nu) = \begin{cases} \int d\nu \, \frac{d\mu}{d\nu} \log \frac{d\mu}{d\nu} & \mu \ll \nu \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è una distanza (non è simmetrica non soddisfa diseg. triangolare)
ma in tanti problemi è il modo migliore di confrontare due probabilità.

oss. per convessità (stretta) di $\phi(x) = x \log x$ e diseg di Jensen

$\phi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$



$$\mathrm{Ent}(\mu|\nu) \geq \phi\left(\int d\nu \, \frac{d\mu}{d\nu} \right) = \phi(1) = 0$$

$= 0$ sse $\frac{d\mu}{d\nu} = 1$ ν q.s.

ovvero $\mu = \nu$

<u>Def</u> Fisso $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad Ent(\cdot|\nu) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,+\infty]$
def da

$$Ent(\mu|\nu) := \sup_{f \in C_b(\Omega)} \{ \mu(f) - \log \nu(e^f) \}$$

$C_b(\Omega)$ → funz. continue e limitate da Ω a $\mathbb{R}$

<u>OSS 0</u> $Ent(\mu|\nu) \geq 0$
scegli $f = 0$

<u>OSS 1</u> Fissata $f \in C_b(\Omega)$

$\mu \longmapsto \mu(f)$ è funzione continua da $\mathcal{P}(\Omega)$ a $\mathbb{R}$

quindi

$Ent(\cdot|\nu)$ è l.s.c. [= semicontinuo inferiormente]

come sup di funzionali continui

<u>Invero</u>
se $\forall \alpha$ $\quad \ell_\alpha : S \to \mathbb{R}$ è continuo

$$\Rightarrow \quad \ell(x) := \sup_\alpha \ell_\alpha(x)$$
è l.s.c. da $S \to (-\infty, +\infty]$

ipotesi <u>solo</u> per α fisso

<u>OSS 2</u> Fissata $f \in C_b(\Omega)$

$\mu \longmapsto \mu(f)$ è funzione affine su $\mathcal{P}(\Omega)$

$$\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \longmapsto \alpha\mu_1(f) + (1-\alpha)\mu_2(f)$$

quindi

$Ent(\cdot|\nu)$ è convessa da $\mathcal{P}(\Omega)$ a $[0,+\infty]$

<u>inverso</u> $\ell_\alpha : S \to (-\infty, +\infty]$ convesso

$\Rightarrow \quad \ell(x) := \sup_\alpha \ell_\alpha(x)$ è convesso

ipotesi <u>solo</u> per α fisso

<u>OSS 3</u> (Basic entropy inequality)

$\forall f \in C_b(\Omega)$

$$\mu(f) \leq \lg \nu(e^f) + \mathrm{Ent}(\mu | \nu)$$

come si concilia con $\int d\nu \frac{d\mu}{d\nu} \lg \frac{d\mu}{d\nu}$?

<u>Lemma</u> Sia $\mathrm{Ent}(\mu|\nu) < +\infty$

$\Rightarrow \quad \mu \ll \nu$

e $\mathrm{Ent}(\mu|\nu) = \underbrace{\int d\nu \frac{d\mu}{d\nu} \lg \frac{d\mu}{d\nu}}$

può ancora essere $+\infty$

sarà $< +\infty$ quando

$\frac{d\mu}{d\nu}$ è un po' meglio di $L_1(\nu)$

$[\, L \lg L \,]$

<u>dim</u> : ~~esercizio~~

esercizio

~~Nota (Disuguaglianza di $d_{TV}(\mu,\nu) = \sup_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B) - \nu(A)|$~~

OSS 4 (Non la useremo)

Disuguaglianza di Csiszar

$$d_{TV}(\mu,\nu) = \sup_{B \in \mathcal{B}(\Omega)} |\mu(B) - \nu(B)|$$ distanza in variazione totale

(molto più forte della topologia indotta dalla convergenza debole)

~~$d_{TV}(\mu,\nu) \le \sqrt{2\, \mathrm{Ent}(\mu|\nu)}$~~

$$d_{TV}(\mu,\nu)^2 \le \frac{1}{2} \mathrm{Ent}(\mu|\nu)$$

— · —

Useremo $\mathrm{Ent}(\cdot\,|\,\nu)$

quando Ω è un insieme finito

e ν è la prob. uniforme su Ω

In questo caso

$$\mathrm{Ent}(\mu|\nu) = \sum_{\omega \in \Omega} \nu(\omega) \frac{\mu(\omega)}{\nu(\omega)} \lg \frac{\mu(\omega)}{\nu(\omega)} \qquad \left[\nu(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \right]$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) \lg \mu(\omega) + \lg |\Omega|$$

$\mathrm{Ent}(\mu|\nu)$ è minima $(=0)$ quando μ è uniforme

è massima ($= \lg|\Omega|$)

quando μ pesa un ! punto

$\mu(\cdot) = \delta_{\bar\omega}(\cdot)$

Principio variazionale di Gibbs in volume finito

$\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$

$\Omega_\Lambda = \{0,1\}^\Lambda \qquad H_\Lambda(\omega|\eta) = \sum_{X \cap \Lambda \neq \emptyset} \phi_X(\omega_\Lambda \, \eta_{\Lambda^c})$

conviene però cambiare la normalizzazione.
Scelgo come "misura a priori" la probabilità uniforme su Ω_Λ

$$\rho_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} \left(\tfrac{1}{2} \delta_0 + \tfrac{1}{2} \delta_1 \right)$$

$$\mu_\Lambda^\eta(\omega) = \underbrace{\rho_\Lambda(\omega)}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{1}{2^{|\Lambda|}}}} \frac{e^{-H_\Lambda(\omega|\eta)}}{Z_\Lambda^\eta}$$

~~ovvero~~ in particolare $\quad Z_\Lambda^\eta = \frac{1}{2^{|\Lambda|}} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} e^{-H_\Lambda(\omega|\eta)}$

[la pressione cambia di $\log 2$]

Introduco energia media in Λ

$$U_\Lambda^\eta : \mathcal{P}(\Omega_\Lambda) \to \mathbb{R}$$

$$U_\Lambda^\eta(\mu) = \mu(H_\Lambda(\cdot|\eta))$$

$$= \langle H_\Lambda(\cdot|\eta) \rangle_\mu \qquad \text{energia media rispetto a } \mu$$

OSS $\quad U_\Lambda^\eta$ è affine ~~lin~~ (rispetto a μ)

$\eta \in \Omega_{\Lambda^c}$ è fissata, la elimino dalla notazione

TEO (Principio variazionale di Gibbs in volume finito)

(questo vuole farvi essere uniformi) (questo vuole farvi abbassare l'energia)

$$\mu_\Lambda = \arg\inf_{\mu \in \mathcal{P}(\Omega_\Lambda)} \left\{ \mathrm{Ent}(\mu | \rho_\Lambda) + U_\Lambda^\Phi(\mu) \right\}$$

$$\inf_{\mu \in \mathcal{P}(\Omega_\Lambda)} \left\{ \mathrm{Ent}(\mu | \rho_\Lambda) + \underbrace{U_\Lambda(\mu)}_{} \right\} = - \log Z_\Lambda$$

(Φ (interazione) è solo qui)

—

oss. cambiando i segni

$$\log Z_\Lambda = \sup_\mu \left\{ - U_\Lambda(\mu) - \mathrm{Ent}(\mu | \rho_\Lambda) \right\}$$

è una dualità di Legendre

$$\left[\quad f^*(p) = \sup_x \{ x \cdot p - f(x) \} \quad \right]$$

In particolare

$\mathrm{Ent}(\cdot | \rho_\Lambda)$ convessa $\Rightarrow$ pressione è convessa

dim

① U_Λ è affine $\quad$ $\mathrm{Ent}(\cdot | \rho_\Lambda)$ è strettamente convesso

il minimo è !, faccio la derivata e viene

[esercizio]

② $$\mu_\Lambda^\eta(\omega) = \varrho_\Lambda(\omega)\,\frac{e^{-H_\Lambda(\omega|\eta)}}{Z_\Lambda^\eta}$$ stato di Gibbs di vol finito

calcoliamo

$$\mathrm{Ent}(\mu|\mu_\Lambda) = \sum_\omega \mu(\omega)\lg\frac{\mu(\omega)}{\mu_\Lambda(\omega)}$$

$$= \sum_\omega \mu(\omega)\lg\frac{\mu(\omega)}{\varrho_\Lambda(\omega)} + \sum_\omega \mu(\omega)\lg\frac{\varrho_\Lambda(\omega)}{\mu_\Lambda(\omega)}$$

$$= \mathrm{Ent}(\mu|\varrho_\Lambda) + \sum_\omega \mu(\omega)\lg\frac{Z_\Lambda}{e^{-H_\Lambda(\omega)}}$$

$$= \mathrm{Ent}(\mu|\varrho_\Lambda) + U_\Lambda(\mu) + \lg Z_\Lambda$$

ora

$$\mathrm{Ent}(\mu|\mu_\Lambda) \geq 0$$
$$= 0 \quad \text{sse} \quad \mu = \mu_\Lambda$$

∎

Vogliamo formulare lo stesso principio per gli stati di volume infinito

ma $\mathrm{Ent}() = +\infty$ $\quad U = +\infty$

dividiamo per $|\Lambda|$ e passiamo al limite

nuovi effetti ent limite <u>non</u> più strettamente convesso

possibilità di non unicità del minimo

Formulazione <u>solo</u> per probabilità su $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ invarianti per traslazioni.

⊙ energia (per sito) di volume infinito

$$\mathcal{P}_\theta(\Omega) = \{ \mu \in \mathcal{P}(\Omega) : \quad \mu \circ \vartheta_x^{-1} = \mu \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d \}$$

$$(\vartheta_x \omega)_y = \omega_{y-x} \qquad \text{traslazione di } x$$

$$\vartheta_x : \Omega \circlearrowleft$$

<u>Lemma</u> Sia $\Phi \in \mathcal{B}$ (sp. di Banach "grande")

$$|||\Phi||| = \sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \|\phi_X\|_\infty$$

$$H_\Lambda(\omega) = \sum_{X \subset \Lambda} \phi_X(\omega) \qquad \text{condizioni al bordo vuote}$$

Se $\mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$ allora

$$u^\Phi(\mu) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \mu(H_\Lambda) \qquad \text{(il limite } \exists \text{ ed è uguale a)}$$

$$= ~~\mu \sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \phi~~$$

$$= \sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \mu(\phi_X)$$

$u^\Phi : \mathcal{P}_\theta(\Omega) \to \mathbb{R}$ continua e affine

<u>dim</u>

come già osservato

$$H_\Lambda(\omega) = \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\substack{X \ni x \\ X \subset \Lambda}} \frac{1}{|X|} \phi_X(\omega)$$

per invarianza traslazioni di Φ, per $\mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$

$$\mu(H_\Lambda) = |\Lambda| \sum_{\substack{X \ni 0 \\ X \subset \Lambda}} \frac{1}{|X|} \mu(\phi_X)$$

~~che~~ conv. assolutamente se $\Phi \in \mathcal{B}$

<u>OSS</u> se $\Phi \in \mathcal{B}_1$ $\quad \|\Phi\| = \sum_{X \ni 0} |\phi_X|_\infty$

e $\mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$

$$\frac{1}{|\Lambda|} \mu(H_\Lambda(\cdot|\eta)) \to u^\Phi(\mu) \quad \text{unif. in } \eta$$

⊙ entropia (per sito) di volume infinito

è proprio l'entropia di Shannon
base della teoria dell'informazione
(dice di quanto si possono comprimere messaggi
prodotti da sorgenti ergodiche ——)

e_Λ prob. uniforme su $\Omega_\Lambda = \{0,1\}^\Lambda$

e legge di Bernoulli iid (con $\text{prob}(0) = \text{prob}(1) = 1/2$)

"prob. uniforme su Ω"

<u>notazione</u> se $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$

indico con $\pi_\Lambda \mu$ il marginale di μ

su $\Omega_\Lambda = \{0,1\}^\Lambda$

ovvero $\pi_\Lambda \mu \in \mathcal{P}(\Omega_\Lambda)$

Vorrei dichiarare

$$\operatorname{ent}(\mu|e) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \operatorname{Ent}(\pi_\Lambda \mu \,|\, e_\Lambda)$$

in effetti limite $\exists$ (se $\mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$) ed ha un sacco di belle proprietà - - -

TEO Sia $\mathrm{ent}(\cdot|\varrho) : \mathcal{P}_\theta(\Omega) \to [0, +\infty]$ definito da

$$\mathrm{ent}(\mu|\varrho) := \sup_{\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \mathrm{Ent}(\pi_\Lambda \mu | \varrho_\Lambda)$$

Allora

- $\mathrm{ent}(\cdot|\varrho)$ è l.s.c.
- $\mathrm{ent}(\cdot|\varrho)$ è affine
- $\mathrm{ent}(\cdot|\varrho) \leq \log 2$
- $\forall \mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \mathrm{Ent}(\pi_\Lambda \mu | \varrho_\Lambda) = \mathrm{ent}(\mu|\varrho)$$

OSS Non si afferma che $\mathrm{ent}(\cdot|\varrho)$ è continuo (in effetti ciò è falso)

|| Argomento di superadditività ||

Lemma se $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, ~~$\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$~~

$$\mathrm{Ent}(\pi_\Lambda \mu | \varrho_\Lambda) \geq \mathrm{Ent}(\pi_{\Lambda_1} \mu | \varrho_{\Lambda_1}) + \mathrm{Ent}(\pi_{\Lambda_2} \mu | \varrho_{\Lambda_2})$$

$\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ [non necessariamente invariante per traslazioni] dim

$$\mu_1 = \pi_{\Lambda_1}\mu \qquad \mu_2 = \pi_{\Lambda_2}\mu$$

$$\pi_\Lambda \mu \ll \mu_1 \times \mu_2$$

quindi

$$\pi_\Lambda \mu = f(\omega_1,\omega_2)\, \mu_1(\omega_1)\, \mu_2(\omega_2)$$

$$\mathrm{Ent}(\pi_\Lambda\mu \mid \rho_\Lambda) = \sum_{\omega_1,\omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\,\mu_1(\omega_1)\,\mu_2(\omega_2) \cdot \lg \frac{f(\omega_1,\omega_2)\,\mu_1(\omega_1)\,\mu_2(\omega_2)}{\underbrace{2^{-|\Lambda_1|}\; 2^{-|\Lambda_2|}}_{=\rho_\Lambda(\omega)}}$$

poichè

$$\sum_{\omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\,\mu_2(\omega_2) = 1$$

$$\sum_{\omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\,\mu_1(\omega_1) = 1$$

$$= \mathrm{Ent}(\mu_1 \mid \rho_{\Lambda_1}) + \mathrm{Ent}(\mu_2 \mid \rho_{\Lambda_2})$$

$$+ \underbrace{\sum_{\omega_1,\omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\,\mu_1(\omega_1)\,\mu_2(\omega_2)\, \lg f(\omega_1,\omega_2)}_{\geq 0}$$

per convessità di

$$f \mapsto f \lg f$$

e Jensen

in effetti

quanto $= \mathrm{Ent}(\pi_\Lambda\mu \mid \mu_1\times\mu_2)$

Lemma (ambisinale o)

a_n successione superadditiva, $a_{n+m} \geq a_n + a_m$,

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = \sup_n \frac{a_n}{n} \quad \left(\begin{array}{l} \text{potrebbe} \\ \text{essere } \sup = +\infty \end{array} \right)$$

OSS se limite lungo $n_k = 2^k$

superadd. $\Rightarrow$ $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k} + a_{n_k}$

$\Rightarrow \dfrac{a_{n_k}}{n_k} \nearrow$ ma per altre ~~succ~~ sottosucc. non è ~~vero~~ detto

dim

Basta

$$\lim_n \frac{a_n}{n} \geq \sup_n \frac{a_n}{n}$$

Fissa m. $\underbrace{\text{Per } n > m}$ $n = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor m + r$

$r = 0, \dots, m-1$

da superadditività

$$a_n \geq \lfloor \frac{n}{m} \rfloor a_m + \inf_{k=1,\dots,m-1} a_k$$

$$\frac{a_n}{n} \geq \underbrace{\frac{1}{n} \lfloor \frac{n}{m} \rfloor}_{\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{m}} a_m + \underbrace{\frac{1}{n} \inf_{k=1,\dots,m-1} a_k}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0}$$

$$\lim_n \frac{a_n}{n} \geq \frac{a_m}{m}$$

faccio sup in m e finisco

$\boxtimes$

dim Teo ent in volume infinito

- $\exists$ limite viene direttamente dai due lemmi + invarianza per traslazioni di μ
  $\mathrm{Ent}(\pi_\Lambda \mu | \rho_\Lambda)$ è la stessa se traslato Λ

- $\mathrm{ent}(\cdot|\rho)$ è lsc come sup di funzioni lsc
- " " convesso " " convesse

- $\mathrm{ent}(\mu|\rho) \le \lg 2$ viene da ~~Ent(Λ|μ)~~
  $\mathrm{Ent}(\pi_\Lambda\mu | \rho_\Lambda) \le \lg 2^{|\Lambda|}$

rimane

⊛ $\mathrm{ent}(\cdot|\rho)$ concavo

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$$

$$\mathrm{Ent}(\pi_\Lambda \mu | \rho_\Lambda) = \mathrm{Ent}(\alpha \underbrace{\pi_\Lambda\mu_1}_{=\nu_1} + (1-\alpha)\underbrace{\pi_\Lambda\mu_2}_{=\nu_2} | \rho_\Lambda)$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda} \alpha\,\nu_1(\omega) \lg \frac{\overbrace{\alpha\,\nu_1(\omega) + (1-\alpha)\nu_2(\omega)}^{\ge 0}}{2^{-|\Lambda|}}$$

$$+ \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda} (1-\alpha)\nu_2(\omega) \lg \frac{\overbrace{\alpha\,\nu_1(\omega)}^{\ge 0} + (1-\alpha)\nu_2(\omega)}{2^{-|\Lambda|}}$$

$$\ge \alpha\,\mathrm{Ent}(\nu_1|\rho_\Lambda) + (1-\alpha)\,\mathrm{Ent}(\nu_2|\rho_\Lambda)$$

$$+ \underbrace{\alpha \lg\alpha + (1-\alpha)\lg(1-\alpha)}$$

$\rightsquigarrow$ quando divido per $|\Lambda|$ e passo al limite $\to 0$

B sp. di Banach "grande" delle interazioni

$$\Phi = \{ \phi_X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ continue, } \mathcal{F}_X \text{ mis} \}_{X \subset\subset \mathbb{Z}^d}$$

$$|||\Phi||| = \sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} |\phi_X|_\infty$$

B^* duale $= \{$ funzionali lineari continui su B $\}$

$P : B \to \mathbb{R}$ pressione nel limite termodinamico
convessa 1-Lip

sottodifferenziale di P

$\Phi \in B$ $\quad \partial P(\Phi) = \{ \ell \in B^* : P(\Psi) \geq P(\Phi) + \ell(\Psi - \Phi) \}$

$\partial P(\Phi)$ comunque non vuoto

Lemma

$$\chi : \mathcal{G}_\theta(\Omega) \to B^*$$

definita da

$$\chi(\mu) = -u^{\Phi}(\mu) = -\sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \mu(\phi_X)$$

è iniettiva

dim . χ è funzionale lineare continuo su B

~~poiché~~ $\cancel{\phi_X}$ ~~e~~

infatti $\quad u^{\Psi}(\mu) - u^{\Phi}(\mu) = \sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \mu(\Psi_X - \phi_X)$

$$|u^{\Psi}(\mu) - u^{\Phi}(\mu)| \leq |||\Psi - \Phi|||$$

χ è iniettiva

ovvero

$$u^{\Phi}(\mu_1) = u^{\Phi}(\mu_2) \implies \mu_1 = \mu_2$$

so che $\forall\ \Phi \in B$

$$\sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \mu_1(\phi_X) = \sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \mu_2(\phi_X)$$

- Scelgo Φ con solo 1-corpo $\phi_X \neq 0$ solo se $|X|=1$

  ricavo

  $$\mu_1\{w : w_0 = 1\} = \mu_2\{w : w_0 = 1\}$$

  μ_1 e μ_2 sono invarianti per traslazioni

  $\implies \mu_1$ e μ_2 coincono sui cilindri $\{w : w_x = 1\}$

- Scelgo Φ con solo 2 corpi (diciamo $\phi_{\{y_1, y_2\}}$

  ricavo

  $$\mu_1\{w : w_0 = 1, w_y = 1\} = \mu_2\{w : w_0 = 1, w_y = 1\}$$

  μ_1, μ_2 invarianti per traslazioni

  . . . .

ricavo che μ_1 e μ_2 coincidono su tutti i cilindri

e ciò basta

$\square$

TEO (Principio variazionale di Gibbs in volume infinito) 16

① Sia $\Phi \in \mathcal{B}$ (spazio grande)

$$-p(\Phi) = \inf_{\mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)} \{ \mathrm{ent}(\mu|e) + u^{\Phi}(\mu) \}$$

② Sia $\Phi \in \mathcal{B}_1$ (spazio piccolo)

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

(i) $\mu \in \mathcal{G}(\Phi) \cap \mathcal{P}_\theta(\Omega)$ — stato di Gibbs di vol infinito invariante per traslazioni.

(ii) $\mu \in \arg\inf \{ \mathrm{ent}(\mu|e) + u^{\Phi}(\mu) \}$

(iii) $\chi(\mu) \in \partial p(\Phi)$

OSS ⊙ Poiché χ è iniettiva ho effettivamente una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{G}(\Phi) \cap \mathcal{P}_\theta(\Omega)$ e $\partial p(\Phi)$

⊙ Per compattezza di $\mathcal{P}_\theta(\Omega)$ e lsc di $\mathrm{ent}(\cdot|e)$ e continuità di $u^{\Phi}(\cdot)$ — inf = min

dim

① parte (a)

$\forall \mu \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$

$$\mathrm{ent}(\mu|e) + u^{\Phi}(\mu) + p(\Phi) \geq 0$$

è lo stesso calcolo del caso di volume finito

Sia $\bar{\mu}_\Lambda$ stato di Gibbs in Λ con bordo vuoto

$$\bar{\mu}_\Lambda(\omega) = e_\Lambda(\omega) \frac{e^{-H_\Lambda(\omega)}}{Z_\Lambda} \qquad e_\Lambda(\omega) = 2^{-|\Lambda|}$$

$\mathrm{Ent}(\pi_\Lambda\mu \mid \bar\mu_\Lambda)$

$$= \sum_\omega \pi_\Lambda\mu(\omega) \lg \frac{\pi_\Lambda\mu(\omega)}{\underbrace{\bar\mu_\Lambda(\omega)}_{= e_\Lambda(\omega)\frac{e^{-H_\Lambda(\omega)}}{Z_\Lambda}}}$$

$$= \mathrm{Ent}(\pi_\Lambda\mu \mid e_\Lambda) + \underbrace{(\pi_\Lambda\mu)(H_\Lambda)}_{=\mu(H_\Lambda)} + \lg Z_\Lambda \geq 0$$

divido per $|\Lambda|$ e passo al limite per $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$
in modo che $\exists$ limite termodinamico pressione

ricavo

$$\mathrm{ent}(\mu|e) + u^{\Phi}(\mu) + p(\Phi) \geq 0$$

parte (b)

devo costruire una successione $\mu^n \in \mathcal{P}_\theta(\Omega)$

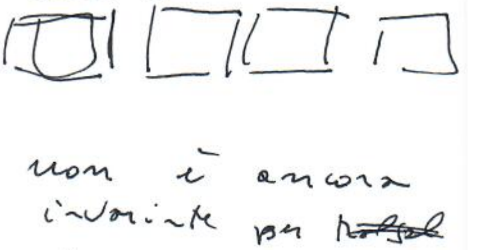
t.c.
$$\mathrm{ent}(\mu^n|e) + u^{\Phi}(\mu^n) \to -p(\Phi)$$

Vorrei usare $\bar\mu_{\Lambda_n}$ con $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$.

purtroppo questo non è invariante per traslazioni

Devo lavorarlo un po'

- $\mathbb{Z}^d = \bigcup_i \Lambda_n^i$ (partizione)



$$\hat\mu_n = \bigotimes_i \bar\mu_{\Lambda_n^i}$$

non è ancora invariante per ~~traslaz~~ traslazioni ma periodico

$$\bar{\bar\mu}_n = \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{x\in\Lambda_n} \hat\mu_n \circ \vartheta_x^{-1}$$

questo è invariante per traslazioni

vedi Simon Prop. III.4.6

questo argomento mostra anche che

$$\mathcal{G}(\Phi) \cap \mathcal{P}_\theta(\Omega) \text{ è non vuoto}$$

(2)

(i) $\Rightarrow$ (ii) ovvero $\mu \in \mathcal{G}(\Phi) \cap \mathcal{P}_\theta(\Omega)$

~~$\mu \in \arg\inf$~~ $\Rightarrow \mu \in \arg\inf \{ ent(\mu | \rho) + u^\Phi(\mu) \}$

Per (1) parte (a)

$$ent(\mu | \rho) + u^\Phi(\mu) + p(\Phi)$$

$$= \cancel{\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} \{ Ent(\pi_\Lambda \mu | \bar{\mu}_\Lambda) + (\pi_\Lambda \mu)(H_\Lambda) + \log Z_\Lambda \}}$$

$$= \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\Lambda|} Ent(\pi_\Lambda \mu | \bar{\mu}_\Lambda)$$

poiché $\Phi \in B_1$ (spazio piccolo)

usando DLR su Λ

ricavo che

$$\sup_{\omega \in \Omega_\Lambda} \left| \log \frac{(\pi_\Lambda \mu)(\omega)}{\bar{\mu}_\Lambda(\omega)} \right| = o(|\Lambda|)$$

già fatto questo conto ~~per la continuità di $\eta \mapsto \bar{\mu}^\eta_\Lambda$~~

per confrontare $H_\Lambda(\cdot|\eta)$ con $H_\Lambda(\cdot|\eta')$

ricavo che $\to 0$ per $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

ovvero $\mu \in \arg\inf \{ \mathrm{ent}(\mu|e) + u^{\Phi}(\mu) \}$

$$\Rightarrow \quad \chi(\mu) \in \partial p(\Phi)$$

[è un fatto generale per trasformate di Legendre]

poiché $\mu \in \arg\inf \ldots$

$$-p(\Phi) = \mathrm{ent}(\mu|e) + u^{\Phi}(\mu)$$

d'altra parte per (1) parte (a) $\forall\ \Psi$ vale

$$\mathrm{ent}(\mu|e) + u^{\Psi}(\mu) \geq -p(\Psi)$$

ricavo

$$p(\Psi) \geq -\mathrm{ent}(\mu|e) - u^{\Psi}(\mu)$$

$$= p(\Phi) - [u^{\Psi}(\mu) - u^{\Phi}(\mu)]$$

$$= p(\Phi) \underbrace{- u^{\Psi-\Phi}(\mu)}_{= \chi(\mu)(\Psi-\Phi)}$$

$$= p(\Phi) + \chi(\mu)(\Psi - \Phi)$$

ovvero $\chi(\mu) \in \partial p(\Phi)$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

ovvero $\quad \chi(\mu) \in \partial p(\Phi) \Rightarrow \mu \in \mathcal{G}(\Phi)$

supponi $\quad |\partial p(\Phi)| = 1 \qquad$ (! funzionale tangente a p in Φ)

poiché

$$\mathcal{G}(\Phi) \cap \mathcal{P}_\theta(\Omega) \neq \emptyset$$

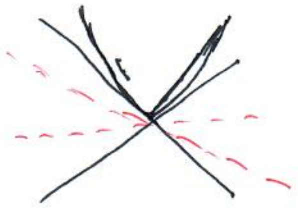
per (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)

$$\partial p(\Phi) = \{ \chi(\mu) \} \quad \text{per } \mu \in \mathcal{G}(\Phi) \cap \mathcal{P}_\theta(\Omega)$$

Fatto generale di analisi convessa

$$\partial p(\Phi) = \underset{*\text{ debole}}{\text{chiusura}} \left\{ \underset{\text{convesso}}{\text{inviluppo}} \left\{ \text{limiti * deb. di } \ell_n \in \partial p(\Phi_n) \text{ con } |\partial p(\Phi_n)| \right\} \right\}$$

facendo ~~???~~ inviluppo convesso e chiusura * debole ogni funzionale tangente in Φ si può ottenere come limite * debole di funzionali tangenti in punti di unicità



poiché $\mathcal{G}(\Phi)$ è convesso e chiuso abbiamo vinto

infatti $\quad \chi(\mu_n) \xrightarrow{\text{topologia * debole in } \mathcal{B}^*} \chi(\mu) \iff \underset{\substack{\uparrow \\ \text{convergenza debole in } \mathcal{P}_\theta(\Omega)}}{\mu_n \to \mu}$

e χ è affine

Verifico tale affermazione

$\chi(\mu_n) \xrightarrow{*} \chi(\mu)$

vuol dire $\forall\ \Phi \in B$ (spazio grande

$u^{\Phi}(\mu_n) \to u^{\Phi}(\mu)$

ovvero

$$\sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \mu_n(\phi_X) \to \sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} \mu(\phi_X)$$

scegliendo Φ opportunamente (come prima)

ricavo $\mu_n \to \mu$ sui cilindri [uso μ inv. per traslazioni]

Viceversa se $\mu_n \to \mu$

allora $\forall\ X \subset\subset \mathbb{Z}^d$ $\mu_n(\phi_X) \to \mu(\phi_X)$

passo al limite in $\sum_{X \ni 0}$ per convergenza dominata

$$|\mu_n(\phi_X)| \leq |\phi_X|_\infty$$

e $\sum_{X \ni 0} \frac{1}{|X|} |\phi_X|_\infty < +\infty$