TEO

① $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ è

convesso, compatto e non vuoto

② $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ $\Lambda_n \subset\subset \mathbb{Z}^d$

$\mu_{\Lambda_n}^{\eta^n}$ misura di Gibbs di vol finito con bordo η^n

Se $\mu_{\Lambda_n}^{\eta^n} \to \mu \Rightarrow \mu \in \mathcal{G}$

N.B. L'enunciato è $\mathcal{G} \supset \{$limiti deboli di mis di vol finito$\}$

in effetti vale

$\mathcal{G} =$ inviluppo convesso chiuso $\{$limiti deboli stati di vol. finito$\}$

Sarà interessante capire quando $|\mathcal{G}| > 1$

- Poiché $\mathcal{P}(\Omega)$ è compatto

~~in effetti~~ $\mathcal{G}$ compatto equivale a $\mathcal{G}$ chiuso dim Dato $\Delta \subset\subset \mathbb{Z}^d$

Sia $\mathcal{G}_\Delta = \{ \mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ t.c. DLR valgono per $\Delta \}$

$= \{ \mu : \mu(\cdot) = \mu(\mu^{\cdot}_\Delta(\cdot)) \}$

e stati in Δ con bordo.

evidentemente

$$\mathcal{G} = \bigcap_{\Delta \subset\subset \mathbb{Z}^d} \mathcal{G}_\Delta$$

Faro vedere che $\cdot$ $\mathcal{G}_\Delta$ è compatto, convesso, non vuoto

e $\Delta \subset \Delta' \Rightarrow \mathcal{G}_{\Delta'} \subset \mathcal{G}_\Delta$

$\cdots \therefore$ ① segue

Passo 1

$\mu \in \mathcal{G}_\Delta \iff$ μ è comb. convessa di stati in Δ (per diverse condiz. al bordo)

$\iff \exists\, \nu \in \mathcal{P}(\Omega_{\Delta^c})$ t.c.

$$\mu(\cdot) = \int_{\Omega_{\Delta^c}} \nu(d\eta)\, \mu^\eta_\Delta(\cdot)$$

(stato vol in Δ con bordo η)

dim:

$\Leftarrow$ ~~ovvio~~

Dato ν sia $\mu(d\omega_\Delta\, d\eta_{\Delta^c}) = \nu(d\eta)\, \mu^\eta_\Delta(d\omega)$

che soddisfa DLR (Δ)

[il marginale di μ su Ω_{Δ^c} è ν]

$\Rightarrow$ Dato μ dichiamo ν il marginale di μ su Ω_{Δ^c} DLR (Δ) $\Rightarrow$ affermazione

<u>Passo 2</u>

$$\Delta \subset \Delta' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}_{\Delta'} \subset \mathcal{G}_{\Delta}$$

" se vale DLR(Δ') $\Rightarrow$ vale DLR(Δ) quando $\Delta \subset \Delta'$ "

Grazie a passo 1 è come la dim che le misure di Gibbs di vol finito sono compatibili

Allora era per $\nu(\cdot) = \delta_\eta(\cdot)$

ma

$$\nu(d\eta') = \int \nu(d\eta) \, \delta_\eta(d\eta')$$

" ogni ~~m~~ prob è comb. convessa di δ "

<u>Passo 3</u>

$\mathcal{G}_\Delta$ è chiuso, convesso, non vuoto

- non vuoto: fissata $\eta \in \Omega_{\Delta^c}$ $\quad \mu_\Delta^\eta$ (pensata come prob su tutto Ω) $\in \mathcal{G}_\Delta$

- convesso

$$\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}_\Delta \qquad \alpha \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \in \mathcal{G}_\Delta$$

- chiuso sia $\mu_n \in \mathcal{G}_\Delta$ e $\mu_n \to \mu$

Vale

$$\mu_n(\cdot) = \int_{\Omega_{\Delta^c}} \mu_n(d\eta) \, \mu_\Delta^\eta(\cdot)$$

passo al limite ~~[illegible]~~ $n \to \infty$ e trovo $\quad \mu \in \mathcal{G}_\Delta$

Passo 4

Sia Δ_n successione così (ad esempio) $\Delta_n \uparrow \mathbb{Z}^d$

e $\Delta_{n+1} \supset \Delta_n$

per passo 2

$$\mathcal{G} = \bigcap_{\Delta \subset\subset \mathbb{Z}^d} \mathcal{G}_\Delta = \underbrace{\bigcap_n \underbrace{\mathcal{G}_{\Delta_n}}_{\text{compatto convesso non vuoto}}}$$

↑ comp. convesso non vuoto

dim ② [per compattezza di $\mathcal{P}(\Omega)$ i limiti su sottosucc. opportuna ∃ sempre]

Sia $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$

e $\mu^{\eta^n}_{\Lambda_n}$ stato in Λ_n con bordo η^n

$$\mu^{\eta^n}_{\Lambda_n} \to \mu$$

Per compatibilità stati di vol. finito

$\mu^{\eta^n}_{\Lambda_n}$ soddisfa $DLR(\Delta)$ $\forall \Delta \subset \Lambda_n$

. .

Ho BARATO !

In effetti dovrei usare da qualche parte che $\Phi \in B_1$

PASSO 3 va bene se

$$\Omega \ni \eta \longmapsto \mu^\eta_\Delta(A)$$ [Δ e A fissati] è continua

Naturalmente

$$\mu^{\eta}_{\Delta}(\cdot) = \mu(\cdot \mid \omega_{\Delta^c} = \eta)$$

slogan: (quasi giusto)

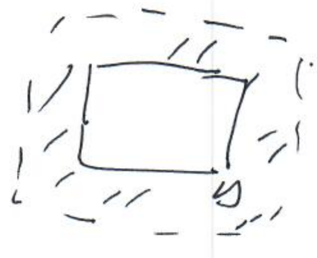
"Le misure di Gibbs di vol ∞ sono quelle per cui $\exists$ una versione continua della prob. condizionata a ~~...~~ $\mathcal{F}_{\Delta^c}$"

<u>Lemma</u> $\Phi \in \mathcal{B}_1$ $\quad \Delta \subset\subset \mathbb{Z}^d$ $\quad f \in \mathcal{F}_{\Delta}$

$\Omega \ni \eta \mapsto \mu^{\eta}_{\Delta}(f)$ è continua

<u>dim</u>: se Φ ha portata finita

è ovvio $\quad \mu^{\eta}_{\Delta}$ dipende da η solo in $\partial^+_r \Delta$



Funz. continue su Ω = ?

quelle che dipendono ~~poco~~ poco da ω_x per x lontani da 0

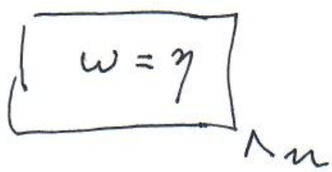
una metrica che genera la top. prodotto è

$$d(\omega,\eta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{2^{|x|}} |\omega_x - \eta_x|$$

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_x = 1 \text{ per } \infty\ x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non potrà mai essere continua

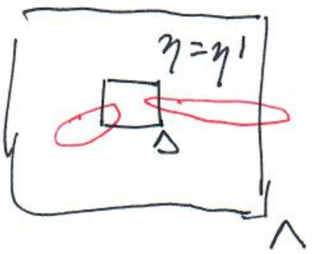
Supponiamo invece



$\omega \neq \eta$

$$\lim_{n} \sup_{\substack{\omega,\eta: \\ \omega = \eta \text{ su } \Lambda_n}} |f(\omega) - f(\eta)| = 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ è continua}$$

"f quasilocale"



$\eta \neq \eta'$

$\eta, \eta' \in \Omega_{\Delta^c}$ t.c. $\eta = \eta'$ su Λ

$$H_\Delta(\omega|\eta) - H_\Delta(\omega|\eta')$$

$$= \sum_{X \cap \Delta \neq \emptyset} [\phi_X(\omega\eta) - \phi_X(\omega\eta')]$$

$$= \sum_{\substack{X: \\ X \cap \Delta \neq 0 \\ X \cap \Lambda^c \neq 0}} [\phi_X(\omega\eta) - \phi_X(\omega\eta')]$$

poiché $\eta = \eta'$ su Λ rimangono solo X che arrivano a Λ^c

$$|H_\Delta(\omega|\eta) - H_\Delta(\omega|\eta')| \leq \sum_{\substack{X: \\ X \cap \Delta \neq \emptyset \\ X \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} 2|\phi_X|_\infty$$

$$\leq \underbrace{\sum_{x \in \Delta}} \ \underbrace{\sum_{\substack{X \ni x \\ X \cap \Lambda^c \neq \emptyset}} |\phi_X|_\infty} \xrightarrow[\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d]{} 0$$

unif in ω, η, η'

\# finito (fissato) di termini

se $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ è il resto di una serie convergente con questo ingrediente è facile finire il lemma

- $\eta \longmapsto Z_\Delta^\eta$ è continua

$$Z_\Delta^\eta - Z_\Delta^{\eta'} = \sum_{\omega \in \Omega_\Delta} \left[e^{-H_\Delta(\omega|\eta)} - e^{-H_\Delta(\omega|\eta')} \right]$$

- - - -

- $\mu_\Delta^\eta(\omega) - \mu_\Delta^{\eta'}(\omega) \qquad \omega \in \Omega_\Delta$

$$= \frac{1}{Z_\Delta^\eta} e^{-H_\Lambda(\omega|\eta)} - \frac{1}{Z_\Delta^{\eta'}} e^{-H_\Delta(\omega|\eta')}$$

- - - - -

$\boxtimes$

<u>OSS</u>

Dalla dim (TEO) segue che se $\mu \in \mathcal{G}$ (vol ∞) lo possiamo ottenere da μ_Δ^η (vol. finito) scegliendo η non deterministico, ma tirandolo a caso con μ (lui medesimo) e facendo la media

Magari ci riusciamo anche senza fare la media (rispetto a μ) ma scegliendo η "tipico" rispetto a μ

Per μ "ergodiche" ciò effettivamente funziona e facendo inviluppo convesso (e chiuso) le troviamo poi tutte ....