

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (MODULO UNICO)

(Prof. L. Bertini, G. Nappo, F. Spizzichino)

Corso di Laurea in Matematica

Si prega di scrivere il proprio nome su ogni foglio e di giustificare le risposte.

A. Si consideri un mazzo di carte italiane (40 carte numerate da 1 a 10 per ognuno dei quattro semi: denari, coppe, spade e bastoni) ben mischiato. Si volta la prima carta del mazzo che risulta essere il 7 di bastoni. Si prendono poi le successive 3 carte.

1. Calcolare la probabilità che le 3 carte siano i rimanenti tre 7.
2. Calcolare la probabilità che le 3 carte siano tutte di bastoni.
3. Gli eventi di cui si è calcolata la probabilità nei punti 1 e 2 sono indipendenti?
4. Calcolare la probabilità che tra le 3 carte vi sia l'asso (= 1) di bastoni.
5. Sapendo che le 3 carte sono tutte di bastoni calcolare la probabilità che tra esse vi sia l'asso di bastoni.
6. Sapendo che tra le 3 carte vi è l'asso di bastoni calcolare la probabilità che siano tutte di bastoni

B. Alessio e Bruno lanciano ripetutamente un dado equo: Alessio lancia un dado amaranto mentre Bruno lancia un dado blu. Alessio continua a lanciare finché il dado amaranto non risulta uguale a 1 o 2; Bruno finché il dado blu non risulta uguale a 4,5 o 6. Si considerino lanci diversi indipendenti.

1. Calcolare la probabilità che Alessio effettui n lanci. Calcolare la probabilità che Bruno effettui m lanci.
2. Calcolare la probabilità che Alessio e Bruno effettuino entrambi 3 lanci
3. Calcolare la probabilità che Alessio e Bruno effettuino lo stesso numero di lanci.

Carlo vince n euro se Alessio fa n lanci e, contemporaneamente, perde $2m$ euro (ovvero vince $-2m$ euro) se Bruno fa m lanci. [Si consiglia di esprimere la vincita algebrica di Carlo in funzione delle variabili aleatorie X e Y che rappresentano il numero di lanci effettuati, rispettivamente, da Alessio e Bruno.]

4. Calcolare il valore di attesa e, **facoltativamente**, la varianza della vincita di Carlo. Esprimere il valore di attesa della vincita in lire invece che in euro (si ricorda che 1 euro = 1937 lire circa).
5. [Facoltativo] Calcolare la probabilità che Carlo vinca 0 euro.

C. Siano X, Y due variabili aleatorie a valori in $\{0, 1, 2\}$ tali che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 0 \\ \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) &= 1/4\end{aligned}$$

mentre $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1/8$ per i rimanenti valori di $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

1. Calcolare la distribuzione marginale di X .
2. Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(X \cdot Y)$.

Sia Z una variabile aleatoria a valori in $\{0, 1\}$ tale che $\mathbb{P}(\{Z = 0\} | \{X = i\}) = (i + 1)/7$ per $i \in \{0, 1, 2\}$

3. Calcolare la distribuzione di Z .
4. Calcolare $\mathbb{P}(\{X = 2\} | \{Z = 0\})$.