CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (MODULO UNICO)

(Prof. L. Bertini, G. Nappo, F. Spizzichino)

Corso di Laurea in Matematica

Si prega di scrivere il proprio nome su ogni foglio e di giustificare le risposte.

A. Vi è un'urna contenente 3 palline rosse e 2 gialle. Si estraggono a caso tutte le 5 palline senza rimpiazzo e si indichi con R_i, rispettivamente con G_i, l'evento in cui i–ma pallina estratta è rossa, rispettivamente gialla, con $i = 1, \dots, 5$.

1. Calcolare la probabilità di estrarre una pallina rossa all'i–ma estrazione, ovvero $\mathbb{P}(R_i)$ con $i = 1, \dots, 5$.
2. Sapendo che le prime due palline estratte sono rosse, calcolare la probabilità che la terza sia gialla, ovvero $\mathbb{P}(G_3|R_1 \cap R_2)$.
3. Sapendo che l'ultima pallina estratta è gialla, calcolare la probabilità che la prima estratta sia rossa, ovvero $\mathbb{P}(R_1|G_5)$.
4. Calcolare la probabilità di ottenere durante la successione delle estrazioni, la sottosuccessione consecutiva rossa, gialla, rossa, ovvero la probabilità che per almeno un indice $j \in \{1, 2, 3\}$ si verifichi l'evento $R_j \cap G_{j+1} \cap R_{j+2}$

B. Siano ξ ed η due variabili aleatorie che assumono, rispettivamente, i valori $-1, 1$ e $1, 2, \dots, n$ con distribuzione congiunta data da

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\xi = -1, \eta = 1) = \frac{2}{3} \\ &\mathbb{P}(\xi = -1, \eta = k) = 0 \qquad \text{per } k = 2, 3, \dots, n \\ &\mathbb{P}(\xi = 1, \eta = k) = \frac{1}{3n} \qquad \text{per } k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

1. Verificare che $\mathbb{P}$ è effettivamente una distribuzione di probabilità. Calcolare le distribuzioni marginali di ξ ed η, ovvero $\mathbb{P}(\xi = \pm 1)$ e $\mathbb{P}(\eta = k)$ con $k = 1, 2, \dots, n$.
2. Verificare che le variabili ξ ed η sono indipendenti se e solo se $n = 1$.
3. Calcolare la distribuzione di η condizionata a ξ, ovvero $\mathbb{P}(\eta = k|\xi = -1)$ e $\mathbb{P}(\eta = k|\xi = 1)$ con $k = 1, \dots, n$. Utilizzando tale risultato si calcoli il valore atteso di η, $\mathbb{E}(\eta)$.
4. Si consideri il caso $n = 3$ e si trovi la distribuzione di $\zeta = \eta - \xi$, ovvero individuare i valori i che può assumere ζ e calcolare $\mathbb{P}(\zeta = i)$ per tali i.

C. Il Sig. Adamo (A), per 10 sere consecutive, telefona alla sua collega Sig.na Eva (E). La sera la Sig.na Eva è in casa, e quindi risponde al telefono, con probabilità $p = 0.6$ (si suppone indipendenza stocastica in sere diverse).

1. Calcolare la probabilità che A parli con E almeno una volta.
2. Calcolare la probabilità che A non riesca a parlare con E in nessuna delle prime 4 sere.
3. Individuare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria S che conta il numero delle volte in cui A parla con E.
4. In ciascuna delle successive 10 sere, A lancia una moneta equa, e chiama E solo se il risultato è croce. La Sig.na E risponde con le stesse modalità di prima. Sia S' il numero delle volte in cui A ed E si parlano in queste successive 10 sere. Calcolare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria S'.