

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (MODULO UNICO)

(Prof. L. Bertini, G. Nappo, F. Spizzichino)

Corso di Laurea in Matematica

A. Vi sono due urne, la prima contenente 6 palline bianche e 4 rosse, la seconda contenente 3 palline bianche e 7 verdi. Si lancia una moneta equa, se viene testa si estraggono 2 palline (senza rimpiazzo) dalla prima urna, se viene croce si estraggono 2 palline (senza rimpiazzo) dalla seconda urna.

1. Calcolare la probabilità di estrarre 2 palline bianche
2. Sapendo che sono state estratte 2 palline bianche, calcolare la probabilità di aver scelto la prima urna
3. Siano N_b , N_v , il numero totale di palline bianche, rispettivamente verdi, estratte. Trovare la distribuzione congiunta di N_b e N_v , ovvero calcolare $\mathbb{P}(N_b = k, N_v = h)$ per $k, h \in \{0, 1, 2\}$.
4. Trovare la distribuzione di $N_b + N_v$. Verificare che coincide con la distribuzione di $2 - N_r$ (dove N_r è il numero totale di palline rosse estratte).

B. Si effettuano 10 lanci indipendenti di un dado equo. Tre giocatori A, B, C scommettono sul risultato: A vince se esce 1,2 o 3; B se esce 4 o 5 e C se esce 6. Siano inoltre X_A , X_B e X_C il numero di vittorie di, rispettivamente, A , B e C .

1. Trovare la distribuzione congiunta di X_A , X_B , X_C ; ovvero $\mathbb{P}(X_A = k_a, X_B = k_b, X_C = k_c)$ con $k_a, k_b, k_c \in \{0, 1, \dots, 10\}$.
2. Calcolare la distribuzione marginale di X_A , ovvero $\mathbb{P}(X_A = k_a)$ con $k_a \in \{0, 1, \dots, 10\}$.
3. Calcolare il valore di attesa e la varianza di X_A : $\mathbb{E}(X_A)$, $\text{var}(X_A)$.
4. Si supponga ora che il dado venga lanciato n volte. Utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev, determinare n in modo che

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \leq \frac{X_A}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) \geq \frac{1}{100}$$

C. Si effettuano n lanci indipendenti di una moneta non equa. Indicando con $\sigma_i \in \{0, 1\}$ il risultato del lancio i -simo si ha $\mathbb{P}(\sigma_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(\sigma_i = 0) = q$ con $p + q = 1$, $p, q \in (0, 1)$. Sia inoltre $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ e sia $T^{(n)}$ la variabile aleatoria data da

$$T^{(n)}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma_2 \neq \sigma_1 \\ 2 & \text{se } \sigma_2 = \sigma_1, \sigma_3 \neq \sigma_2 \\ \dots & \dots \\ k & \text{se } \sigma_k = \sigma_{k-1} = \dots = \sigma_1, \sigma_{k+1} \neq \sigma_k \\ \dots & \dots \\ n-1 & \text{se } \sigma_{n-1} = \sigma_{n-2} = \dots = \sigma_1, \sigma_n \neq \sigma_{n-1} \\ -1 & \text{se } \sigma_n = \sigma_{n-1} = \dots = \sigma_1, \end{cases}$$

Si osservi che $T^{(n)} = k$ con $k = 1, \dots, n-1$ se vi sono stati k risultati consecutivi identici al primo.

1. Calcolare la probabilità che $T^{(n)}$ sia uguale a 1. Calcolare la probabilità che $T^{(n)}$ sia uguale a 2.
2. Trovare la distribuzione di probabilità di $T^{(n)}$
3. Dimostrare che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^{(n)} = k) &= p q^k + q p^k \quad k = 1, 2, \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T^{(n)} = -1) &= 0 \end{aligned}$$

4. Sia T una variabile aleatoria con distribuzione $\mathbb{P}(T = k) = p q^k + q p^k$ per $k = 1, 2, \dots$. Calcolare il valore di attesa e la varianza di T : $\mathbb{E}(T)$, $\text{var}(T)$.